ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

17

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1893.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT
HERAUSGEGEBEN
VON

JOURNAL
RÉDIGÉ
PAR

G. MITTAG-LEFFLER

17

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1893.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 17. — 1893. — TOME 17.

NOUVELLES RECHERCHES SUR LES SÉRIES EMPLOYÉES DANS LES THÉORIES DES PLANÈTES

PAR

HUGO GYLDÉN
à STOCKHOLM.

CHAPITRE II.

Transformations de quelques équations différentielles.

Le moyen le plus efficace de parvenir aux solutions d'une équation différentielle qu'on ne saurait intégrer d'une manière directe, paraît être de la remplacer par une suite d'autres équations dont chacune s'intègre par des procédés connus. Evidemment, la série que forment les diverses solutions obtenues ainsi doit être convergente.

Les transformations qu'on va donner dans les pages suivantes se rapportent aux équations de deux différentes espèces.

D'abord nous nous occuperons de transformer certaines équations du deuxième ordre dont les divers termes dépendent de puissances entières de la fonction cherchée ainsi que de sa première dérivée.

Le second genre d'équations que nous envisagerons contiendra des fonctions trigonométriques, dans les arguments desquelles figure la fonction demandée.

Mais encore, puisque dans plusieurs occasions il sera favorable ou même nécessaire de ramener une équation proposée, en omettant certains

termes surpassant le premier degré, à la forme linéaire, on a ajouté un paragraphe contenant quelques remarques relativement à l'intégration des équations linéaires. Il s'entend que ces remarques portent uniquement sur la forme des équations qu'on rencontre dans la mécanique céleste.

§ 5. *Equations du deuxième ordre contenant des puissances et des produits de la fonction inconnue et de sa première dérivée.*

1. Avant d'entrer dans les opérations analytiques voici une explication.

Supposons qu'on ait l'équation du deuxième ordre:

$$\frac{d^2y}{dv^2} + f\left(\frac{dy}{dv}, y, v\right) = \Omega,$$

Ω étant une fonction connue de v, et admettons qu'on connaisse une valeur approchée de la solution. En introduisant cette valeur, que nous désignerons par y_0, dans l'équation proposée, on obtient un résultat de la forme:

$$\frac{d^2y_0}{dv^2} + f\left(\frac{dy_0}{dv}, y_0, v\right) - \Omega = R,$$

où la quantité R sera appelée le reste de la solution approchée.

Le plus souvent, il y a lieu d'opérer la détermination de la fonction y_0 de manière que le reste de la solution soit très petit par rapport à la fonction Ω; dans certains cas, cependant, il peut être avantageux d'établir une expression de y_0 telle que le reste soit exempt de termes d'une certaine forme.

2. L'équation que nous allons d'abord considérer est celle-ci:

$$\begin{aligned}(1) \qquad \frac{d^2y}{dv^2} &+ Y_{0.1}y + Y_{0.2}y^2 + Y_{0.3}y^3 \\ &+ \{Y_{1.0} + Y_{1.1}y + Y_{1.2}y^2\}\frac{dy}{dv} \\ &+ \{Y_{2.0} + Y_{2.1}y\}\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = \Omega\end{aligned}$$

où l'on a supposé les $Y_{0.1}, Y_{0.2}, \ldots$ des fonctions connues de v ne renfermant que des constantes et des termes purement trigonométriques.

En adoptant l'hypothèse que la fonction y soit une petite quantité de l'ordre des excentricités ou des inclinaisons, nous avons omis les termes d'un degré plus élevé que le troisième, bien que l'équation que présente la mécanique céleste en puisse contenir un nombre infini. Cependant, nous avons négligé les puissances supérieures non seulement puisqu'on les peut considérer comme très petites, mais encore pour une raison moins arbitraire. La voici.

On a eu l'occasion de voir, dans ce qui précède, qu'on n'arrivera pas toujours à des résultats satisfaisants en abordant les approximations successives par l'intégration d'une équation linéaire ou bien, ce qui revient au même, d'un système d'équations linéaires; mais d'autre part, on a aussi pu constater que la solution peut s'obtenir, même dans certains cas impossibles à traiter au moyen d'équations linéaires, en partant d'une équation du troisième degré. Ayant ainsi obtenu une approximation effective, on en déduit la correction due aux termes négligés toutes les fois que le coefficient de la troisième puissance de l'inconnue n'est pas trop petit. Cette condition étant satisfaite le plus souvent, si non toujours, dans les théories des planètes, il n'y a pas lieu de recourir aux équations d'un degré plus élevé.

Cela étant, admettons qu'on puisse représenter la fonction demandée au moyen du développement que voici:

$$y = (1 - \varphi_{0.1})z + \varphi_{0.2}z^2 + \varphi_{0.3}z^3 + \ldots$$
$$+ (\varphi_{1.0} + \varphi_{1.1}z + \varphi_{1.2}z^2 + \ldots)\frac{dz}{dv}$$
$$+ (\varphi_{2.0} + \varphi_{2.1}z + \varphi_{2.2}z^2 + \ldots)\left(\frac{dz}{dv}\right)^2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{2}$$

où l'on a désigné par $\varphi_{0.1}, \varphi_{1.0}, \ldots$ des fonctions de v qui sont encore à notre disposition, et par z l'intégrale de l'équation qu'on trouve si l'on remplace, dans l'équation (1), y par l'expression (2).

Ecrivons l'équation en z de la manière suivante:

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + Z = \Omega, \tag{3}$$

Z sera évidemment une fonction de z, $\frac{dz}{dv}$, $\frac{d^2z}{dv^2}$, $\frac{d^3z}{dv^3}$ et de v, mais elle dépend encore des fonctions arbitraires $\varphi_{0,1}$, $\varphi_{1,0}$, ..., de sorte qu'on peut, en déterminant ces fonctions d'une manière convenable, faire disparaître les coefficients de certains termes dans Z. On peut même, dans quelques cas, choisir les fonctions arbitraires de manière que toute la fonction Z devienne très petite ou qu'elle se réduise, au moins pour sa partie essentielle, à un petit nombre de termes, par exemple à

$$Z = Z_1 z + \beta' z \frac{dz}{dv} + \beta z^3,$$

Z_1 étant une fonction connue de v, et β' et β, des constantes.

En différentiant l'expression (2), il viendra:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dv} = & -\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} z + \frac{d\varphi_{0.2}}{dv} z^2 + \frac{d\varphi_{0.3}}{dv} z^3 + \dots \\
& + \left\{ 1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} + \left[2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} \right] z + \left[3\varphi_{0.3} + \frac{d\varphi_{1.2}}{dv} \right] z^2 + \dots \right\} \frac{dz}{dv} \\
& + \left\{ \varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv} + \left[2\varphi_{1.2} + \frac{d\varphi_{2.1}}{dv} \right] z + \dots \right\} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \\
& + \left\{ \varphi_{2.1} + \frac{d\varphi_{3.0}}{dv} + \dots \right\} \left(\frac{dz}{dv} \right)^3 + \dots \\
& + \left\{ \varphi_{1.0} + \varphi_{1.1} z + \varphi_{1.2} z^2 + \dots \right\} \frac{d^2z}{dv^2} \\
& + \left\{ 2\varphi_{2.0} + 2\varphi_{2.1} z + \dots \right\} \frac{dz}{dv} \frac{d^2z}{dv^2} \\
& + 3\varphi_{3.0} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \frac{d^2z}{dv^2} + \dots,
\end{aligned} \tag{4}$$

d'où l'on tire, par une seconde différentiation:

$$
\begin{aligned}
(5)\quad \frac{d^2y}{dv^2} = & -\frac{d^2\varphi_{0.1}}{dv^2}z + \frac{d^2\varphi_{0.2}}{dv^2}z^2 + \frac{d^2\varphi_{0.3}}{dv^2}z^3 + \dots \\
& + \Big\{-2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} - \frac{d^2\varphi_{1.0}}{dv^2} + \Big[4\frac{d\varphi_{0.2}}{dv} + \frac{d^2\varphi_{1.1}}{dv^2}\Big]z \\
& \qquad + \Big[6\frac{d\varphi_{0.3}}{dv} + \frac{d^2\varphi_{1.2}}{dv^2}\Big]z^2 + \dots\Big\}\frac{dz}{dv} \\
& + \Big\{2\varphi_{0.2} + 2\frac{d\varphi_{1.1}}{dv} + \frac{d^2\varphi_{2.0}}{dv^2} + \Big[6\varphi_{0.3} + 4\frac{d\varphi_{1.2}}{dv} + \frac{d^2\varphi_{2.1}}{dv^2}\Big]z + \dots\Big\}\Big(\frac{dz}{dv}\Big)^2 \\
& + \Big\{2\varphi_{1.2} + 2\frac{d\varphi_{2.1}}{dv} + \frac{d^2\varphi_{3.0}}{dv^2} + \dots\Big\}\Big(\frac{dz}{dv}\Big)^3 + \dots \\
& + \Big\{1 - \varphi_{0.1} + 2\frac{d\varphi_{1.0}}{dv} + \Big[2\varphi_{0.2} + 2\frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\Big]z \\
& \qquad + \Big[3\varphi_{0.3} + 2\frac{d\varphi_{1.2}}{dv}\Big]z^2 + \dots\Big\}\frac{d^2z}{dv^2} \\
& + \Big\{3\varphi_{1.1} + 4\frac{d\varphi_{2.0}}{dv} + \Big[6\varphi_{1.2} + 4\frac{d\varphi_{2.1}}{dv}\Big]z + \dots\Big\}\frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{dv^2} \\
& + \Big\{5\varphi_{2.1} + 6\frac{d\varphi_{3.0}}{dv} + \dots\Big\}\Big(\frac{dz}{dv}\Big)^2\frac{d^2z}{dv^2} \\
& + \{2\varphi_{2.0} + 2\varphi_{2.1}z + \dots\}\Big(\frac{d^2z}{dv^2}\Big)^2 \\
& + \{6\varphi_{3.0} + \dots\}\frac{dz}{dv}\Big(\frac{d^2z}{dv^2}\Big)^2 \\
& + \{\varphi_{1.0} + \varphi_{1.1}z + \varphi_{1.2}z^2 + \dots\}\frac{d^3z}{dv^3} \\
& + \{2\varphi_{2.0} + 2\varphi_{2.1}z + \dots\}\frac{dz}{dv}\frac{d^3z}{dv^3} \\
& + \{3\varphi_{3.0} + \dots\}\Big(\frac{dz}{dv}\Big)^2\frac{d^3z}{dv^3} \\
& + \dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Pour arriver à l'équation (3), ainsi que pour établir les équations de condition d'où se dérivent les fonctions $\varphi_{0.1}, \varphi_{1.0}, \ldots$ il nous faut encore les expressions suivantes où l'on n'a retenu que les termes jusqu'au troisième degré inclusivement:

$$y^2 = (1 - \varphi_{0.1})^2 z^2 + 2(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{0.2} z^3$$
$$+ \{2(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0} z + 2[\varphi_{1.0}\varphi_{0.2} + (1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.1}] z^2\} \frac{dz}{dv}$$
$$+ \{\varphi_{1.0}^2 + [2(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{2.0} + 2\varphi_{1.0}\varphi_{1.1}] z\} \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + 2\varphi_{1.0}\varphi_{2.0}\left(\frac{dz}{dv}\right)^3$$

$$y^3 = (1 - \varphi_{0.1})^3 z^3 + 3(1 - \varphi_{0.1})^2 \varphi_{1.0} z^2 \frac{dz}{dv}$$
$$+ 3(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0}^2 z \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + \varphi_{1.0}^3 \left(\frac{dz}{dv}\right)^3,$$

$$\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right)^2 z^2 - 2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\frac{d\varphi_{0.2}}{dv} z^3$$
$$+ \left\{-2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right) z\right.$$
$$\left. + 2\left[\frac{d\varphi_{0.2}}{dv}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right) - \frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right)\right] z^2\right\} \frac{dz}{dv}$$
$$+ \left\{\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)^2 + \left[2\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - 2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right)\right] z\right\} \left(\frac{dz}{dv}\right)^2$$
$$+ 2\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right)\left(\frac{dz}{dv}\right)^3$$
$$+ \left\{-2\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} z + 2\left[\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \varphi_{1.1}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right] z^2\right\} \frac{d^2z}{dv^2}$$
$$+ \left\{2\varphi_{1.0}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right) + \left[-4\varphi_{2.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + 2\varphi_{1.1}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + 2\varphi_{1.0}\left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right)\right] z\right\} \frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{dv^2}$$
$$+ \left[2\varphi_{1.0}\left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right) + 4\varphi_{2.0}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\right]\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \frac{d^2z}{dv^2}$$
$$+ \{\varphi_{1.0}^2 + 2\varphi_{1.0}\varphi_{1.1} z\}\left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2 + 4\varphi_{1.0}\varphi_{2.0}\frac{dz}{dv}\left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2,$$

$$
\begin{aligned}
y\frac{dy}{dv} = &-(1-\varphi_{0.1})\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}z^2 + \left[(1-\varphi_{0.1})\frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \varphi_{0.2}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right]z^3 \\
&+ \left\{\left[(1-\varphi_{0.1})\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right) - \varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right]z\right. \\
&\qquad + \left[\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \varphi_{1.1}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + (1-\varphi_{0.1})\left(2\varphi_{0.2}+\frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{0.2}\right]z^2\right\}\frac{dz}{dv} \\
&+ \left\{\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0} + \left[\left(2\varphi_{0.2}+\frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right)\varphi_{1.0} - \varphi_{2.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + \varphi_{1.1}\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + (1-\varphi_{0.1})\left(2\varphi_{1.1}+\frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right)\right]z\right\}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \\
&+ \left[\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{2.0} + \varphi_{1.0}\left(\varphi_{1.1}+\frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right)\right]\left(\frac{dz}{dv}\right)^3 \\
&+ \{(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.0}z + [(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.1} + \varphi_{1.0}\varphi_{0.2}]z^2\}\frac{d^2z}{dv^2} \\
&+ \{\varphi_{1.0}^2 + [2(1-\varphi_{0.1})\varphi_{2.0} + 2\varphi_{1.0}\varphi_{1.1}]z\}\frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{dv^2} \\
&+ 3\varphi_{1.0}\varphi_{2.0}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y^2\frac{dy}{dv} = &-(1-\varphi_{0.1})^2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}z^3 \\
&+ \left[-2(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + (1-\varphi_{0.1})^2\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\right]z^2\frac{dz}{dv} \\
&+ \left[-\varphi_{1.0}^2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + 2(1-\varphi_{0.1})\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}\right]z\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \\
&+ \left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}^2\left(\frac{dz}{dv}\right)^3 \\
&+ (1-\varphi_{0.1})^2\varphi_{1.0}z^2\frac{d^2z}{dv^2} \\
&+ 2(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.0}^2 z\frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{dv^2} \\
&+ \varphi_{1.0}^3\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2},
\end{aligned}
$$

$$y\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = (1-\varphi_{0.1})\left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right)^2 z^3$$

$$+\left[-2(1-\varphi_{0.1})\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}+\varphi_{1.0}\left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right)^2\right]z^2\frac{dz}{dv}$$

$$+\left[(1-\varphi_{0.1})\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)^2-2\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right]z\left(\frac{dz}{dv}\right)^2$$

$$+\varphi_{1.0}\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)^2\left(\frac{dz}{dv}\right)^3$$

$$-2(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}z^2\frac{d^2z}{dv^2}$$

$$+\left[2(1-\varphi_{0.1})\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}-2\varphi_{1.0}^2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right]z\frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{dv^2}$$

$$+2\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}^2\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2}$$

$$+(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.0}^2 z\left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2$$

$$+\varphi_{1.0}^3\frac{dz}{dv}\left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2.$$

3. En introduisant les expressions que nous venons d'établir dans l'équation (1) nous aurons un résultat de la forme que voici:

$$(6)\qquad \frac{d^2z}{dv^2}+A_{0.1}z+A_{0.2}z^2+A_{0.3}z^3$$

$$+\{A_{1.0}+A_{1.1}z+A_{1.2}z^2\}\frac{dz}{dv}$$

$$+\{A_{2.0}+A_{2.1}z\}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2+A_{3.0}\left(\frac{dz}{dv}\right)^3$$

$$+\{B_{0.0}+B_{0.1}z+B_{0.2}z^2\}\frac{d^2z}{dv^2}$$

$$+\{B_{1.0}+B_{1.1}z\}\frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{dv^2}+B_{2.0}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2}$$

$$+\{B'_{0.0}+B'_{0.1}z\}\left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2+B'_{1.0}\frac{dz}{dv}\left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2$$

$$+\{C_{0.0}+C_{0.1}z+C_{0.2}z^2\}\frac{d^2z}{dv^2}$$

$$+\{C_{1.0}+C_{1.1}z\}\frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{dv^2}+C_{2.0}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2}=\Omega.$$

Evidemment, par la transformation exécutée, des termes se sont produits dont le degré est plus élevé que le troisième; on les comprendra dans la fonction Ω.

Les divers coefficients entrant dans l'équation précédente sont donnés au moyen des formules suivantes:

$$(7, \mathrm{a}) \quad A_{0.1} = -\frac{d^2\varphi_{0.1}}{dv^2} + Y_{0.1}(1 - \varphi_{0.1}) - Y_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv},$$

$$(7, \mathrm{b}) \quad A_{1.0} = \frac{d^2\varphi_{1.0}}{dv^2} + Y_{0.1}\varphi_{1.0} + Y_{1.0}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right) - 2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv},$$

$$(7, \mathrm{c}) \quad A_{0.2} = \frac{d^2\varphi_{0.2}}{dv^2} + Y_{0.1}\varphi_{0.2} + Y_{1.0}\frac{d\varphi_{0.2}}{dv} + Y_{0.2}(1 - \varphi_{0.1})^2$$
$$- Y_{1.1}(1 - \varphi_{0.1})\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + Y_{2.0}\left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right)^2,$$

$$(7, \mathrm{d}) \quad A_{1.1} = \frac{d^2\varphi_{1.1}}{dv^2} + Y_{0.1}\varphi_{1.1} + Y_{1.0}\left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right) + 2Y_{0.2}(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0}$$
$$+ Y_{1.1}\left\{(1 - \varphi_{0.1})\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right) - \varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right\}$$
$$- 2Y_{2.0}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + 4\frac{d\varphi_{0.2}}{dv},$$

$$(7, \mathrm{e}) \quad A_{2.0} = \frac{d^2\varphi_{2.0}}{dv^2} + Y_{0.1}\varphi_{2.0} + Y_{1.0}\left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right) + Y_{0.2}\varphi_{1.0}^2$$
$$+ Y_{1.1}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0} + Y_{2.0}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)^2$$
$$+ 2\varphi_{0.2} + 2\frac{d\varphi_{1.1}}{dv},$$

$$(7, \mathrm{f}) \quad A_{0.3} = \frac{d^2\varphi_{0.3}}{dv^2} + Y_{0.1}\varphi_{0.3} + Y_{1.0}\frac{d\varphi_{0.3}}{dv} + 2Y_{0.2}(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{0.2}$$
$$+ Y_{1.1}\left[(1 - \varphi_{0.1})\frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \varphi_{0.2}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right] - 2Y_{2.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\frac{d\varphi_{0.2}}{dv}$$
$$+ Y_{0.3}(1 - \varphi_{0.1})^3 - Y_{1.2}(1 - \varphi_{0.1})^2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}$$
$$+ Y_{2.1}(1 - \varphi_{0.1})\left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right)^2,$$

$$
\begin{aligned}
(7, \mathrm{g}) \quad A_{1.2} = {} & \frac{d^2\varphi_{1.2}}{dv^2} + Y_{0.1}\varphi_{1.2} + Y_{1.0}\left(3\varphi_{0.3} + \frac{d\varphi_{1.2}}{dv}\right) \\
& + 2Y_{0.2}[(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.1} + \varphi_{1.0}\varphi_{0.2}] \\
& + Y_{1.1}\Big[(1-\varphi_{0.1})\left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right) + \varphi_{0.2}\left(1-\varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right) \\
& \qquad\qquad + \varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \varphi_{1.1}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\Big] \\
& + 2Y_{2.0}\left[\left(1-\varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right)\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right] \\
& + 3Y_{0.3}(1-\varphi_{0.1})^2\varphi_{1.0} \\
& + Y_{1.2}\left[(1-\varphi_{0.1})^2\left(1-\varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right) - 2(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right] \\
& + Y_{2.1}\left[-2(1-\varphi_{0.1})\left(1-\varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + \varphi_{1.0}\left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right)^2\right] \\
& + 6\frac{d\varphi_{0.3}}{dv},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(7, \mathrm{h}) \quad A_{2.1} = {} & \frac{d^2\varphi_{2.1}}{dv^2} + Y_{0.1}\varphi_{2.1} + Y_{1.0}\left(2\varphi_{1.2} + \frac{d\varphi_{2.1}}{dv}\right) \\
& + 2Y_{0.2}[(1-\varphi_{0.1})\varphi_{2.0} + \varphi_{1.0}\varphi_{1.1}] \\
& + Y_{1.1}\Big[\left(1-\varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.1} + \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right)\varphi_{1.0} \\
& \qquad\qquad - \varphi_{2.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + (1-\varphi_{0.1})\left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right)\Big] \\
& + 2Y_{2.0}\Big[\left(1-\varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right) \\
& \qquad\qquad - \left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right)\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\Big] \\
& + 3Y_{0.3}(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.0}^2
\end{aligned}
$$

$$+ Y_{1.2}\left[-\varphi_{1.0}^2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + 2(1-\varphi_{0.1})\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}\right]$$

$$+ Y_{2.1}\left[(1-\varphi_{0.1})\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)^2 - 2\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right]$$

$$+ 6\varphi_{0.3} + 4\frac{d\varphi_{1.2}}{dv},$$

$$(7, \text{i}) \quad A_{3.0} = \frac{d^2\varphi_{3.0}}{dv^2} + Y_{0.1}\varphi_{3.0} + Y_{1.0}\left(\varphi_{2.1}+\frac{d\varphi_{3.0}}{dv}\right) + 2Y_{0.2}\varphi_{1.0}\varphi_{2.0}$$

$$+ Y_{1.1}\left[\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{2.0} + \left(\varphi_{1.1}+\frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}\right]$$

$$+ 2Y_{2.0}\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\left(\varphi_{1.1}+\frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right)$$

$$+ Y_{0.3}\varphi_{1.0}^3$$

$$+ Y_{1.2}\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}^2$$

$$+ Y_{2.1}\left(1-\varphi_{0.1}+\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)^2\varphi_{1.0}$$

$$+ 2\varphi_{1.2} + 2\frac{d\varphi_{2.1}}{dv},$$

$$(8, \text{a}) \quad B_{0.0} = -\varphi_{0.1} + 2\frac{d\varphi_{1.0}}{dv} + Y_{1.0}\varphi_{1.0},$$

$$(8, \text{b}) \quad B_{0.1} = 2\varphi_{0.2} + 2\frac{d\varphi_{1.1}}{dv} + Y_{1.0}\varphi_{1.1} + Y_{1.1}(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.0} - 2Y_{2}\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv},$$

$$(8, \text{c}) \quad B_{0.2} = 3\varphi_{0.3} + 2\frac{d\varphi_{1.2}}{dv} + Y_{1.0}\varphi_{1.2}$$

$$+ Y_{1.1}[(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.1} + \varphi_{1.0}\varphi_{0.2}]$$

$$+ 2Y_{2.0}\left[\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \varphi_{1.1}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right]$$

$$+ Y_{1.2}(1-\varphi_{0.1})^2\varphi_{1.0}$$

$$- 2Y_{2.1}(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv},$$

(8, d) $$B_{1.0} = 3\varphi_{1.1} + 4\frac{d\varphi_{2.0}}{dv} + 2Y_{1.0}\varphi_{2.0} + Y_{1.1}\varphi_{1.0}^2$$

$$+ 2Y_{2.0}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0},$$

(8, e) $$B_{1.1} = 6\varphi_{1.2} + 4\frac{d\varphi_{2.1}}{dv} + 2Y_{1.0}\varphi_{2.1}$$

$$+ 2Y_{1.1}[(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{2.0} + \varphi_{1.0}\varphi_{1.1}] + 2Y_{1.2}(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0}^2$$

$$+ 2Y_{2.0}\left[-2\varphi_{2.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.1}\right.$$

$$\left. + \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right)\varphi_{1.0}\right]$$

$$+ 2Y_{2.1}\left[-\varphi_{1.0}^2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + (1 - \varphi_{0.1})\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}\right],$$

(8, f) $$B_{2.0} = 5\varphi_{2.1} + 6\frac{d\varphi_{3.0}}{dv} + 3Y_{1.0}\varphi_{3.0} + 3Y_{1.1}\varphi_{1.0}\varphi_{2.0}$$

$$+ 2Y_{2.0}\left[\left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0} + 2\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{2.0}\right]$$

$$+ 2Y_{2.1}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}^2 + Y_{1.2}\varphi_{1.0}^3,$$

(8, g) $$B'_{0.0} = 2\varphi_{2.0} + Y_{2.0}\varphi_{1.0}^2,$$

(8, h) $$B'_{0.1} = 2\varphi_{2.1} + 2Y_{2.0}\varphi_{1.0}\varphi_{1.1} + Y_{2.1}(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0}^2,$$

(8, i) $$B'_{1.0} = 6\varphi_{3.0} + 4Y_{2.0}\varphi_{1.0}\varphi_{2.0} + Y_{2.1}\varphi_{1.0}^3,$$

(9, a) $$C_{0.0} = \varphi_{1.0},$$

(9, b) $$C_{0.1} = \varphi_{1.1},$$

(9, c) $$C_{0.2} = \varphi_{1.2},$$

(9, d) $$C_{1.0} = 2\varphi_{2.0},$$

(9, e) $$C_{1.1} = 2\varphi_{2.1},$$

(9, f) $$C_{2.0} = 3\varphi_{3.0},$$

A l'aide des équations que nous venons d'établir, on parvient à déterminer les fonctions $\varphi_{0.1}$, $\varphi_{1.0}$, ... Ces fonctions étant au nombre de neuf, on peut les choisir de manière à remplir neuf conditions en quelque sorte arbitraires: on pourrait, ce qui semble au premier coup d'oeil le plus naturel, égaler tous les neuf coefficients A à zéro, ou l'on en pourrait faire disparaître un certain nombre, se réservant les fonctions encore à déterminer pour réduire à zéro quelques-uns des coefficients B et C, ou du moins pour les rendre très petits. En un mot, on peut disposer des conditions arbitraires de diverses manières afin de rendre l'équation résultante (3) ou (6) aussi propre à l'intégration que possible.

Mais, en déterminant les fonctions dont il s'agit, il faut avoir soin, premièrement, que les valeurs de ces fonctions restent très petites du premier ordre, vu qu'autrement on ne serait pas assuré de la convergence des approximations qu'on a entamées en négligeant, dans l'équation (6), les termes dépassant le troisième degré; et puis que ces fonctions ne contiendront aucun terme ayant la variable hors des signes trigonométriques.

Il y a lieu ici de faire encore une autre remarque. Le plus souvent, on peut prévoir la nature de l'équation (6), à savoir la nature de la fonction Z dans l'équation (3), de sorte qu'on sera à même d'éliminer, au moyen de cette équation, les termes dépendant de $\frac{d^2z}{dv^2}$ et de $\frac{d^3z}{dv^3}$ dans l'équation (6), cette élimination ne devant, toutefois, s'étendre au terme contenant $\frac{d^2z}{dv^2}$ seul.

Faisons maintenant l'application des formules précédentes à quelques cas particuliers que nous retrouverons dans le courant de nos recherches.

Dans la première application des formules précédentes, nous admettons que parmi les fonctions constituant les coefficients de l'équation (1), seulement les trois premières soient différentes de zéro, de sorte que nous ayons:

$$\frac{d^2y}{dv^2} + Y_1 y + Y_2 y^2 + Y_3 y^3 = \Omega. \tag{10}$$

En supposant les coefficients Y_1, Y_2, Y_3 ainsi que la fonction Ω très petits du premier ordre par rapport aux masses troublantes, nous dé-

terminerons les fonctions $\varphi_{0.1}, \varphi_{1.0}, \ldots$ de façon à satisfaire aux conditions suivantes, qui découlent immédiatement des équations (7).

$$\frac{d^2\varphi_{0.1}}{dv^2} + Y_1\varphi_{0.1} = Y_1 - \beta_{0.1}, \tag{11, a}$$

$$\frac{d^2\varphi_{1.0}}{dv^2} + Y_1\varphi_{1.0} = 2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + \beta_{1.0}, \tag{11, b}$$

$$\frac{d^2\varphi_{0.2}}{dv^2} + Y_1\varphi_{0.2} = -Y_2(1-\varphi_{0.1})^2 + \beta_{0.2}, \tag{11, c}$$

$$\frac{d^2\varphi_{1.1}}{dv^2} + Y_1\varphi_{1.1} = -2Y_2(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.0} - 4\frac{d\varphi_{0.2}}{dv} + \beta_{1.1}, \tag{11, d}$$

$$\frac{d^2\varphi_{2.0}}{dv^2} + Y_1\varphi_{2.0} = -Y_2\varphi_{1.0}^2 - 2\varphi_{0.2} - 2\frac{d\varphi_{1.1}}{dv} + \beta_{2.0}, \tag{11, e}$$

$$\frac{d^2\varphi_{0.3}}{dv^2} + Y_1\varphi_{0.3} = -2Y_2(1-\varphi_{0.1})\varphi_{0.2} - Y_3(1-\varphi_{0.1})^3 + \beta_{0.3}, \tag{11, f}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi_{1.2}}{dv^2} + Y_1\varphi_{1.2} = &-2Y_2[(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.1} + \varphi_{1.0}\varphi_{0.2}] \\ &-3Y_3(1-\varphi_{0.1})^2\varphi_{1.0} - 6\frac{d\varphi_{0.3}}{dv} + \beta_{1.2},\end{aligned} \tag{11, g}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi_{2.1}}{dv^2} + Y_1\varphi_{2.1} = &-2Y_2[(1-\varphi_{0.1})\varphi_{2.0} + \varphi_{1.0}\varphi_{1.1}] \\ &-3Y_3(1-\varphi_{0.1})\varphi_{1.0}^2 - 6\varphi_{0.3} - 4\frac{d\varphi_{1.2}}{dv} + \beta_{2.1},\end{aligned} \tag{11, h}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi_{3.0}}{dv^2} + Y_1\varphi_{3.0} = &-2Y_2\varphi_{1.0}\varphi_{2.0} - Y_3\varphi_{1.0}^3 \\ &-2\varphi_{1.2} - 2\frac{d\varphi_{2.1}}{dv} + \beta_{3.0}.\end{aligned} \tag{11, i}$$

Comme il est visible, nous n'avons pas égalé les quantités $A_{0.1}, A_{1.0}, \ldots$ à zéro, mais bien à d'autres quantités $\beta_{0.1}, \beta_{1.0}, \ldots$ que nous supposerons constantes. En voici la raison.

En examinant les équations (11), on aperçoit tout de suite qu'elles ont la forme commune:

$$\frac{d^2\varphi}{dv^2} + Y_1\varphi = W,$$

W étant une fonction connue dépendant des Y_n et des φ déjà déterminés. Les différents φ s'obtiennent donc de proche en proche. Mais en effectuant les diverses intégrations il peut arriver qu'on se heurte contre des termes séculaires provenant de la multiplication de deux fonctions trigonométriques ayant le même argument. En disposant convenablement des constantes disponibles, on fera facilement disparaître ces termes. Rien n'empêche cependant que plusieurs des constantes dont il s'agit n'acquièrent, dans le courant du calcul, la valeur zéro.

Ayant ainsi déterminé les fonctions φ, on aura au lieu de l'équation (6) celle-ci:

$$
\begin{aligned}
(12)\quad & \frac{d^2z}{dv^2} + \beta_{0.1}z + \beta_{0.2}z^2 + \beta_{0.3}z^3 \\
& + \{\beta_{1.0} + \beta_{1.1}z + \beta_{1.2}z^2\}\frac{dz}{dv} + \{\beta_{2.0} + \beta_{2.1}z\}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + \beta_{3.0}\left(\frac{dz}{dv}\right)^3 \\
& + \{B_{0.0} + B_{0.1}z + B_{0.2}z^2\}\frac{d^2z}{dv^2} + \{B_{1,0} + B_{1.1}z\}\frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{dv^2} + B_{2.0}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2} \\
& + \{B'_{0.0} + B'_{0.1}z\}\left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2 + B'_{1.0}\frac{dz}{dv}\left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2 \\
& + \{C_{0.0} + C_{0.1}z + C_{0.2}z^2\}\frac{d^3z}{dv^3} + \{C_{1.0} + C_{1.1}z\}\frac{dz}{dv}\frac{d^3z}{dv^3} + C_{2.0}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\frac{d^3z}{dv^3} \\
& = \Omega,
\end{aligned}
$$

où l'on a négligé les termes du quatrième degré et d'un degré plus élevé.

Maintenant, puisque les fonctions φ sont déterminées, les B, les B' et les C le sont aussi, et on peut même, certaines conditions étant satisfaites, considérer les termes dépendant de ces fonctions comme connus. En effet, si les β étaient suffisamment petits et que les φ fussent des quantités du premier ordre, on pourrait écrire approximativement:

$$\frac{d^2z}{dv^2} = \Omega,$$

supposé toutefois que la valeur de z ne devient pas très grande par l'intégration.

En introduisant cette expression de $\frac{d^2 z}{dv^2}$ ainsi que celle-ci:

$$\frac{d^3 z}{dv^3} = \frac{d\Omega}{dv}$$

dans l'équation précédente, nous aurons une nouvelle équation dont la forme est celle de l'équation (1), et on en peut déduire, au moyen des transformations que nous venons d'indiquer, une nouvelle équation dont la forme serait celle de l'équation (12). Mais puisque, dans la nouvelle équation (1), les Γ_n seront du deuxième ordre par rapport aux masses troublantes, abstraction faite des constantes β, les nouvelles fonctions φ, et par conséquent les nouvelles B et C seront aussi du deuxième ordre. On parvient donc, en continuant les opérations indiquées, à l'équation finale:

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\frac{d^2 z}{dv^2} + \beta_{0.1} z + \beta_{0.2} z^2 + \beta_{0.3} z^3 \\ &\quad + \{\beta_{1.0} + \beta_{1.1} z + \beta_{1.2} z^2\} \frac{dz}{dv} \\ &\quad + \{\beta_{2.0} + \beta_{2.1} z\} \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + \beta_{3.0} \left(\frac{dz}{dv}\right)^3 \\ &\quad = \Omega, \end{aligned}$$

bien entendu sous la condition nécessaire que la valeur de z trouvée par les diverses approximations soit si non une quantité du premier ordre, du moins sensiblement inférieure à l'unité.

4. Il peut, cependant, arriver qu'il soit avantageux d'attribuer à la fonction $A_{0.1}$ une autre valeur que celle d'une constante. Si, par exemple, il était nuisible à la convergence des approximations successives de garder la fonction $\varphi_{0.1}$ différente de zéro, on peut la mettre, dès l'abord, égale à zéro, ce qui entraînerait immédiatement:

$$\varphi_{1.0} = 0,$$

et ensuite:

$$B_{0.0} = B'_{0.0} = C_{0.0} = 0.$$

Par cette détermination, l'expression (2) deviendrait évidemment plus simple qu'elle ne l'aurait été, si l'on avait cherché la fonction $\varphi_{0.1}$ en intégrant l'équation (11, a), mais en revanche on renoncerait à réduire le coefficient de z à une constante. En faisant $\varphi_{0.1} = 0$ nous aurons:

$$A_{0.1} = Y_1,$$

de sorte que, au lieu de l'équation (12), nous obtiendrons la suivante:

$$(14) \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2z}{dv^2} + Y_1 z + \beta_{0.2}z^2 + \beta_{0.3}z^3 \\ &\quad + \{\beta_{1.0} + \beta_{1.1}z + \beta_{1.2}z^2\}\frac{dz}{dv} \\ &\quad + \{\beta_{2.0} + \beta_{2.1}\}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + \beta_{3.0}\left(\frac{dz}{dv}\right)^3 \\ &\quad + \{B_{0.1}z + B_{0.2}z^2\}\frac{d^2z}{dv^2} + \ldots = \Omega. \end{aligned}$$

Si maintenant, en cherchant l'expression préalable de z — par l'intégration de l'équation précédente, après y avoir omis les termes dépendant des fonctions $B, \ldots$ — on trouvait une valeur de z_0 suffisamment petite, on aurait d'une manière facile la correction z_1 à ajouter à z_0, de sorte qu'on eût:

$$z = z_0 + z_1.$$

Mais on peut aussi opérer comme dans le numéro précédent.

En effet, si nous admettons:

$$\frac{d^2z}{dv^2} = \Omega - Y_1 z - \ldots,$$

$$\frac{d^3z}{dv^3} = \frac{d\Omega}{dv} - \frac{dY_1}{dv}z - Y_1\frac{dz}{dv} - \ldots,$$

nous aurons, au lieu de l'équation (14), une autre, dont le type est celui de l'équation (1): les nouvelles valeurs des coefficients Y y entrant ne diffèrent de la fonction Y_1 ou des constantes β que de quantités du deuxième ordre. A cette nouvelle équation, on peut appliquer les procédés que nous venons de mettre en usage, et on parviendra de cette manière, du moins dans les calculs des perturbations des planètes, à des expressions des intégrales extrêmement approchées des expressions vraies.

Il ne faut pas, cependant, se figurer qu'on puisse pousser les approximations dont nous avons parlé à l'infini; on peut, au contraire, prévoir qu'en dehors d'une certaine limite, les approximations ultérieures ne contribueront plus à l'exactitude du résultat, mais qu'elles le font au contraire écarter de plus en plus de l'expression exacte.

Cependant, ayant trouvé, par la méthode signalée, une valeur très approchée de la fonction z, ce qui nous donne aussi une valeur très approchée de y, que nous désignons par y_0, il sera facile d'en évaluer la correction.

Dans ce but, posons:

$$y = y_0 + y_1$$

et

$$\Omega_0 = \Omega - Y_1 y_0 - Y_2 y_0^2 - Y_3 y_0^3 - \frac{d^2 y_0}{dv^2}, \tag{15}$$

Ω_0 étant une quantité extrêmement petite dont les divers termes ne seront pas agrandis par la double intégration. En introduisant les valeurs indiquées dans l'équation (10), nous aurons:

$$\frac{d^2 y_1}{dv^2} + \{Y_1 + 2Y_2 y_0 + 3Y_3 y_0^2\} y_1 + \{Y_2 + 3Y_3 y_0\} y_1^2 + Y_3 y_1^3 = \Omega_0, \tag{16}$$

équation dont il sera facile de trouver l'intégrale avec l'exactitude qu'on voudra, bien entendu en retranchant, s'il est nécessaire, les termes à longues périodes qui se produisent par les diverses approximations. Ces termes-là se réunissent facilement aux termes de la fonction y_0.

Ajoutons encore la remarque qu'il ne sera point nécessaire de déterminer les fonctions φ avec la dernière exactitude. Il suffit d'en avoir une connaissance si approchée, que les restes de la solution, respectivement multipliés par les diverses puissances de y_0, seront de très petites quantités, qu'on pourra comprendre dans la fonction Ω_0.

L'observation que nous venons de faire tout-à-l'heure nous paraît très utile, vu qu'elle nous dispense de recherches sur la convergence de plusieurs développements intermédiaires.

4. Concevons maintenant le cas où les fonctions $Y_{m.p}$ ont des valeurs très petites à l'exception de $Y_{0.1}$, que nous supposons tout près de l'unité. Donc, en posant:

$$Y_{0.1} = 1 - P_{0.1},$$

la fonction $P_{0.1}$ est une très petite quantité: nous la supposerons de l'ordre des forces troublantes.

En reprenant l'équation (1), nous omettons une partie des termes du troisième degré, vu qu'il n'est pas nécessaire d'y appliquer les transformations dont il s'agit maintenant. Quant aux autres termes du troisième degré, nous les rejoindrons au produit $P_{0.1}y$, ce qui sera permis en vertu des considérations suivantes.

Admettons que la partie principale de la solution de l'équation (1) ait la forme

$$y = (H) \cos [(1 - \varsigma)v - \pi],$$

$(H) \cos \pi$ et $(H) \sin \pi$ étant des fonctions à longue période, dont les dérivées seront, dans les cas ordinaires, de l'ordre de $\varsigma(H)$, mais dans les cas exceptionnels de l'ordre de $\varsigma(H)^3$.

En différentiant l'expression que nous venons d'admettre, il viendra:

$$\frac{dy}{dv} = -(1 - \varsigma)(H) \sin [(1 - \varsigma)v - \pi] + (\lambda),$$

où l'on a employé la notation

$$(\lambda) = \frac{d[(H) \cos \pi]}{dv} \cos (1 - \varsigma)v + \frac{d[(H) \sin \pi]}{dv} \sin (1 - \varsigma)v.$$

La fonction (λ), étant très petite par rapport à y, on peut la négliger dans les formules que nous allons communiquer.

Remarquons d'abord la formule

$$(1 - \varsigma)^2 y^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = (1 - \varsigma)^2 (H)^2$$

et puis, en ne retenant que les termes dépendant de l'argument simple,

$$y^3 = \frac{3}{4}(H)^2 y,$$

$$\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 y = \frac{1}{4}(1 - \varsigma)^2 (H)^2 y.$$

Cela étant, il est facile de voir comment, si l'équation proposée contient les termes

$$\beta_{0.3} y^3 + \beta_{1.2} \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 y,$$

on peut en joindre la partie essentielle à la fonction $P_{0.1}$ multipliée par y.

Dans l'équation (1) qu'on peut maintenant écrire ainsi:

$$(17) \qquad \frac{d^2y}{dv^2} + (1 - P_{0.1})y + P_{1.0}\frac{dy}{dv}$$

$$+ P_{0.2}\left\{(1 - \beta)y^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2\right\} + 2P_{1.1}y\frac{dy}{dv} + P_{2.0}\left\{(1 - \beta)y^2 - \left(\frac{dy}{dv}\right)^2\right\} = \Omega,$$

nous supposons d'abord, pour mieux juger de la portée de nos transformations, les valeurs des divers P telles qu'on peut les apprécier en vertu des comparaisons que voici:

$$P_{1.0} \mathrel{\underline{\circ}} \beta(H)^2,$$

$$P_{0.2} \mathrel{\underline{\circ}} P_{1.1} \mathrel{\underline{\circ}} P_{2.0} \mathrel{\underline{\circ}} \beta(H),$$

la constante β étant liée à ς au moyen de la relation

$$1 - \beta = (1 - \varsigma)^2.$$

La fonction $P_{0.1}$ seule n'obéit pas à ces conditions: en effet, si nous posons

$$P_{0.1} = \beta_1 + P,$$

l'ordre de β_1 et celui de P seront donnés par les comparaisons

$$\beta_1 \mathrel{\underline{\circ}} \beta$$

$$P \mathrel{\underline{\circ}} P_{1.0}.$$

Nous admettons encore que les fonctions $P_{1.0}$ et P ne contiennent que des termes périodiques à longues périodes, que la seconde d'elles contient en outre un terme constant, et que les trois fonctions $P_{0.2}$, $P_{1.1}$ et $P_{2.0}$ dépendent d'arguments de la forme

$$(1 - \sigma)v - B \; ; \; \sigma \mathrel{\underline{\circ}} \varsigma.$$

Maintenant, si nous faisons

$$y = (1 - \varphi_{0.1})E + \varphi_{1.0}\frac{dE}{dv} + \chi_0\left[(1-\beta)E^2 + \left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right] \tag{18}$$
$$+ 2\chi_1 E\frac{dE}{dv} + \chi_2\left[(1-\beta)E^2 - \left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right]$$

et que nous admettions encore la notation

$$\frac{d^2E}{dv^2} + (1-\beta)E = L, \tag{19}$$

il sera possible d'éviter, dans les expressions de $\frac{dy}{dv}$ et de $\frac{d^2y}{dv^2}$, la deuxième dérivée de E, tant qu'elle se trouve multipliée par quelqu'une des fonctions φ et χ.

Pour former, d'une manière aisée, la dérivée de l'équation (18), remarquons les relations suivantes qui découlent immédiatement de l'équation (19), à savoir:

$$\frac{d\left\{(1-\beta)E^2 + \left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right\}}{dv} = 2L\frac{dE}{dv}$$
$$\frac{d\left(E\frac{dE}{dv}\right)}{dv} = -\left\{(1-\beta)E^2 - \left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right\} + LE$$
$$\frac{d\left\{(1-\beta)E^2 - \left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right\}}{dv} = 4(1-\beta)E\frac{dE}{dv} - 2L\frac{dE}{dv}.$$

Or, en différentiant l'équation (18), il viendra:

$$\frac{dy}{dv} = \frac{dE}{dv} - \left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + (1-\beta)\varphi_{1.0}\right)E + \left(\frac{d\varphi_{1.0}}{dv} - \varphi_{0.1}\right)\frac{dE}{dv} \tag{20}$$
$$+ \frac{d\chi_0}{dv}\left\{(1-\beta)E^2 + \left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right\} + 2\left\{\frac{d\chi_1}{dv} + 2(1-\beta)\chi_2\right\}E\frac{dE}{dv}$$
$$+ \left\{\frac{d\chi_2}{dv} - 2\chi_1\right\}\left\{(1-\beta)E^2 - \left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right\}$$
$$+ \varphi_{1.0}L + \left\{2\chi_1 E + 2(\chi_0 - \chi_2)\frac{dE}{dv}\right\}L,$$

et par une nouvelle différentiation nous aurons, toujours faisant usage de l'équation (19) et des formules qui en résultent,

$$(21)\quad \frac{d^2y}{dv^2} = \frac{d^2E}{dv^2} + \left\{ -\frac{d^2\varphi_{0.1}}{dv^2} - 2(1-\beta)\frac{d\varphi_{1.0}}{dv} + (1-\beta)\varphi_{0.1} \right\} E$$

$$+ \left\{ \frac{d^2\varphi_{1.0}}{dv^2} - 2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} - (1-\beta)\varphi_{1.0} \right\} \frac{dE}{dv}$$

$$+ \frac{d^2\chi_0}{dv^2} \left\{ (1-\beta)E^2 + \left(\frac{dE}{dv}\right)^2 \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{d^2\chi_1}{dv^2} + 4(1-\beta)\frac{d\chi_2}{dv} - 4(1-\beta)\chi_1 \right\} 2E\frac{dE}{dv}$$

$$+ \left\{ \frac{d^2\chi_2}{dv^2} - 4\frac{d\chi_1}{dv} - 4(1-\beta)\chi_2 \right\} \left\{ (1-\beta)E^2 - \left(\frac{dE}{dv}\right)^2 \right\}$$

$$+ \varphi_{1.0}\frac{dL}{dv} + \left(2\frac{d\varphi_{1.0}}{dv} - \varphi_{0.1}\right)L + 2(\chi_0 - \chi_2)L^2$$

$$+ \left\{ 2\left[2\frac{d\chi_1}{dv} - (1-\beta)(\chi_0 - \chi_2) + (1-\beta)\chi_2\right]E \right.$$

$$\left. + 2\left[3\chi_1 + 2\frac{d(\chi_0 - \chi_2)}{dv}\right]\frac{dE}{dv} \right\} L$$

$$+ \left\{ 2\chi_1 E + 2(\chi_0 - \chi_2)\frac{dE}{dv} \right\} \frac{dL}{dv}.$$

Maintenant, si l'on introduit dans l'équation (17) les expressions que nous venons d'établir de y, de $\frac{dy}{dv}$ et de $\frac{d^2y}{dv^2}$, et que nous admettions les notations que voici:

$$(22, a)\quad 1 - A_{0.1} = -\frac{d^2\varphi_{0.1}}{dv^2} - 2(1-\beta)\frac{d\varphi_{1.0}}{dv} + (1-\beta)\varphi_{0.1} + (1 - P_{0.1})(1 - \varphi_{0.1})$$

$$- P_{1.0}\left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + (1-\beta)\varphi_{1.0}\right),$$

$$(22, b)\quad A_{1.0} = \frac{d^2\varphi_{1.0}}{dv^2} - 2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} - (1-\beta)\varphi_{1.0} + (1 - P_{0.1})\varphi_{1.0}$$

$$+ P_{1.0}\left(\frac{d\varphi_{1.0}}{dv} - \varphi_{0.1}\right) + P_{1.0},$$

$$(22,\text{c})\qquad A_{0.2}=\frac{d^2\chi_0}{dv^2}+(1-P_{0.1})\chi_0+P_{1.0}\frac{d\chi_0}{dv}+P_{0.2},$$

$$(22,\text{d})\qquad A_{1.1}=\frac{d^2\chi_1}{dv^2}+4(1-\beta)\frac{d\chi_2}{dv}-4(1-\beta)\chi_1+(1-P_{0.1})\chi_1$$
$$+P_{1.0}\left\{\frac{d\chi_1}{dv}+2(1-\beta)\chi_2\right\}+P_{1.1},$$

$$(22,\text{e})\qquad A_{2.0}=\frac{d^2\chi_2}{dv^2}-4\frac{d\chi_1}{dv}-4(1-\beta)\chi_2+(1-P_{0.1})\chi_2$$
$$+P_{1.0}\left\{\frac{d\chi_2}{dv}-2\chi_1\right\}+P_{2.0},$$

il viendra:

$$(23)\qquad \frac{d^2E}{dv^2}+(1-A_{0.1})E+A_{1.0}\frac{dE}{dv}$$
$$+A_{0.2}\left\{(1-\beta)E^2+\left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right\}+2A_{1.1}E\frac{dE}{dv}$$
$$+A_{2.0}\left\{(1-\beta)E^2-\left(\frac{dE^2}{dv}\right)\right\}$$
$$+\varphi_{1.0}\frac{dL}{dv}+\left(2\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}-\varphi_{0.1}+P_{1.0}\varphi_{1.0}\right)L+2(\chi_0-\chi_2)L^2$$
$$+\left\{2\left[2\frac{d\chi_1}{dv}-(1-\beta)(\chi_0-\chi_2)+2(1-\beta)\chi_2+P_{1.0}\chi_1\right]E\right.$$
$$\left.+2\left[3\chi_1+2\frac{d(\chi_0-\chi_2)}{dv}+P_{1.0}(\chi_0-\chi_2)\right]\frac{dE}{dv}\right\}L$$
$$+\left\{2\chi_1E+2(\chi_0-\chi_2)\frac{dE}{dv}\right\}\frac{dL}{dv}=\Omega$$
$$-P_{0.2}\left\{(1-\beta)(y^2-E^2)+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2-\left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right\}$$
$$-\ldots.$$

Le plus souvent, c'est-à-dire dans les cas que présentent, à quelques exceptions près, les mouvements des planètes, on pourrait égaler la fonction $A_{0.1}$ à une constante et les quatre A restants, à zéro. On obtient ainsi, les deux fonctions φ et les trois fonctions χ, les premières du

second degré et les dernières du premier degré. Cela étant, il est évidemment permis de négliger, dans l'équation précédente et dans la première approximation, les termes multipliés par $P_{0.2}$, $P_{1.1}$ ou $P_{2.0}$, tandis qu'il faut garder les termes multipliés par L et $\frac{dL}{dv}$, vu qu'ils sont, à l'exception de

$$2\frac{d\varphi_{1.0}}{dv}L + 2(\chi_0 - \chi_2)L^2,$$

du troisième degré.

Mais nous verrons tout de suite qu'on aura facilement une détermination approchée de la fonction L, ce qui nous permettra de tenir compte, déjà dans la première approximation, des termes dont il s'agit.

Désignant par $\beta_3 H$ la partie constante de la fonction P, nous écrivons:

$$P = \beta_3 H + P'$$

ce qui donne:

$$P_{0.1} = \beta_1 + \beta_3 H + P'.$$

Maintenant, si nous faisons:

$$A_{0.1} = \beta_1 + \beta_3 H, \qquad A_{1.0} = A_{0.2} = A_{1.1} = A_{2.0} = 0,$$

nous aurons de l'équation (23) la suivante:

$$\frac{d^2E}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H)E + \varphi_{1.0}\frac{dL}{dv} - \varphi_{0.1}L + M = \Omega, \tag{24}$$

où l'on a désigné par M une fonction du premier ordre et tout au moins du troisième degré, dont la plus grande partie peut être regardée comme connue.

En retranchant l'équation (19) de l'équation (24), on obtiendra l'équation restante que voici:

$$L = \Omega + (\beta_1 + \beta_3 H - \beta)E - \varphi_{1.0}\frac{dL}{dv} + \varphi_{0.1}L - M. \tag{25}$$

Nous n'avons pas ici motif de considérer d'autres cas que ceux où la différence

$$\beta_1 + \beta_3 H - \beta$$

est très petite, tout au moins du premier ordre et du second degré. D'un

autre côté, nous nous dispensons d'examiner les cas où la fonction E est plus grande qu'une quantité du premier degré, vu qu'autrement l'orbite ne serait plus une orbite planétaire, mais bien pareille à celle d'une comète. Mais cette présomption-là exige, dans les cas exceptionnels, que les termes critiques dans Ω soient tout au moins du troisième degré. Par ces considérations, on conclut que

$$L = \Omega$$

constitue une valeur approchée de L. En effet, la fonction M étant donnée au moyen de la formule

$$(26) \qquad M = \left(2\frac{d\varphi_{1.0}}{dv} + P_{1.0}\varphi_{1.0}\right)L + 2(\chi_0 - \chi_2)L^2$$
$$+ \left\{2\left(2\frac{d\chi_1}{dv} - (1-\beta)(\chi_0 - \chi_2) + 2(1-\beta)\chi_2 + P_{1.0}\chi_1\right)E\right.$$
$$\left. + 2\left(3\chi_1 + 2\frac{d(\chi_0 - \chi_2)}{dv} + P_{1.0}(\chi_0 - \chi_2)\right)\frac{dE}{dv}\right\}L$$
$$+ \left\{2\chi_1 E + 2(\chi_0 - \chi_2)\frac{dE}{dv}\right\}\frac{dL}{dv} + \ldots,$$

elle est dans les cas ordinaires une quantité du troisième degré, mais dans les cas critiques où L est du troisième degré, du cinquième degré. Il s'ensuit que le premier terme du membre droit de l'équation (25) l'emporte sur les autres, bien entendu sous la condition, que $\varphi_{0.1}$ et $\varphi_{1.0}$ soient des quantités du second degré, ainsi que χ_0, χ_1 et χ_2 du premier degré, ce que nous avons supposé, vu qu'autrement la transformation indiquée aurait été sans succès. Mais encore, puisqu'on peut joindre, ce qui est bien évident, les facteurs qui multiplient E et $\frac{dE}{dv}$ aux équations (22, a) et (22, b), et les y considérer comme des quantités connues, la partie restante de M sera, non seulement du troisième ou du cinquième degré, mais même du deuxième ordre. On peut donc commencer les approximations par intégrer l'équation

$$(27) \qquad \frac{d^2E}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H)E = \Omega - \varphi_{1.0}\frac{d\Omega}{dv} + \varphi_{0.1}\Omega.$$

En portant, dans l'équation (25), l'expression de M que nous venons de signaler, nous aurons sans peine un résultat de la forme:

$$L = N - \varphi \frac{dL}{dv}. \tag{28}$$

Dans cette relation, où l'on a négligé le terme dépendant de L^2, on peut considérer N et φ comme des fonctions toutes connues, de la même nature que Ω et $\varphi_{0.1}$. Nous reviendrons plus loin sur la résolution d'une équation du type (28).

5. Revenons aux équations (22). En remplaçant les cinq A par des valeurs déterminées, nous aurons cinq équations linéaires du deuxième ordre, dont la troisième s'intègre indépendemment des autres, et les quatres restantes se divisent en deux groupes formant chacun un système de deux équations simultanées.

Admettant d'abord:

$$A_{0.2} = 0,$$

l'équation (22, c) s'écrit ainsi:

$$\frac{d^2\chi_0}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H - P')\chi_0 + P_{1.0}\frac{d\chi_0}{dv} = - P_{0.2}. \tag{29}$$

Pour nous faire une idée de la nature de l'intégrale, supprimons les termes dépendant de P' et de $P_{1.0}$, vu qu'ils n'exercent aucune influence décisive sur le résultat.

Cela posé, nous allons considérer un terme critique isolé de la fonction $P_{0.2}$, à savoir:

$$P_{0.2} = \gamma \sin[(1 - \sigma)v - B],$$

où la nature critique du terme s'est manifestée en ce que nous avons admis la différence

$$\beta_1 - 2\sigma$$

très petite.

En introduisant, dans l'équation (29), l'expression adoptée de $P_{0.2}$, il en résulte:

$$\chi_0 = \frac{\gamma \sin[(1 - \sigma)v - B]}{\beta_1 + \beta_3 H - 2\sigma + \sigma^2}.$$

Certes, le coefficient du sinus ne peut devenir infini, vu que la constante H contient, parmi d'autres termes, le carré de ce coefficient, mais il peut devenir trop grand pour être considéré comme une quantité du premier degré. Dans ce cas, pour avoir une valeur du premier degré de χ_0, il faudrait égaler $A_{0.2}$ non plus à zéro, mais bien à la fonction χ_0, multipliée par un facteur du premier ordre. Donc, en désignant ce facteur par β_0, nous aurons, au lieu de l'équation (29), celle-ci:

$$\frac{d^2\chi_0}{dv^2} + (1 - \beta_0 - \beta_1 H - P')\chi_0 + P_{0.1}\frac{d\chi_0}{dv} = - P_{0.2}. \tag{30}$$

En maintenant les suppositions de l'exemple précédent, il viendra:

$$\chi_0 = \frac{\gamma \sin[(1 - \sigma)v - B]}{\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 H - 2\sigma + \sigma^2},$$

d'où l'on voit facilement, en considérant γ comme une quantité du premier ordre et du premier degré, que la fonction χ_0 reste du premier degré si la différence $\beta_1 - 2\sigma + \sigma^2$ est très petite.

Pour rendre plus facile l'étude des deux systèmes dans lesquels se divisent les quatre équations restantes du système (22), à savoir: (22, a), (22, b), (22, d) et (22, e), nous allons y opérer une transformation, afin que les deux équations de chaque système soient symétriques, propriété que ne possèdent pas encore les équations dont il s'agit. Dans ce but, on peut utiliser la méthode suivante.

La forme commune aux deux systèmes étant d'abord celle-ci:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dv^2} + A\frac{dx}{dv} + Bx + C\frac{dy}{dv} + Dy + 2p\frac{dy}{dv} + 2qx = M,\\ &\frac{d^2y}{dv^2} + A\frac{dy}{dv} + By - C\frac{dx}{dv} - Dx = N,\end{aligned}\right. \tag{31}$$

A, B, C et D signifiant des fonctions connues, et p et q des constantes, introduisons-y, au lieu de x et y deux inconnues nouvelles, ξ et η, liées aux premières par les deux relations:

$$x = \xi \cos \omega v + \eta \sin \omega v, \qquad y = \eta \cos \omega v - \xi \sin \omega v,$$

dans lesquelles on a désigné par ω une constante indéterminée qu'on

choisira convenablement. Pour rendre les formules qu'on va obtenir plus simples, on se servira de la notation

$$u = \omega v.$$

Cela posé, on obtient, au lieu des équations (31), les suivantes:

$$\frac{d^2\xi}{dv^2} + \frac{d\xi}{dv}[A - 2p \sin u \cos u] + \frac{d\eta}{dv}[2\omega + C + 2p \cos u^2]$$

$$+ \xi[-\omega^2 + B - \omega C - 2\omega p \cos u^2 + 2q \cos u^2]$$

$$+ \eta[\omega A + D - 2\omega p \sin u \cos u + 2q \sin u \cos u] = M \cos u - N \sin u,$$

$$\frac{d^2\eta}{dv^2} + \frac{d\eta}{dv}[A + 2p \sin u \cos u] - \frac{d\xi}{dv}[2\omega + C + 2p \sin u^2]$$

$$+ \eta[-\omega^2 + B - \omega C - 2\omega p \sin u^2 + 2q \sin u^2]$$

$$+ \xi[\omega A + D + 2\omega p \sin u \cos u - 2q \sin u \cos u] = M \sin u + N \cos u,$$

et si l'on pose:

$$\theta = \xi + i\eta,$$

il viendra:

$$(32)\quad \frac{d^2\theta}{dv^2} + \{A - i[2\omega + C + p]\}\frac{d\theta}{dv} + \{-\omega^2 + B - \omega C - \omega p + q - i[\omega A + D]\}\theta$$

$$+ pe^{2iu}\left\{i\frac{d\xi}{dv} + \frac{d\eta}{dv}\right\} + (-p\omega + q)e^{2iu}(\xi - i\eta) = Me^{iu} + iNe^{iu}.$$

De même, en adoptant la notation

$$\Sigma = \xi - i\eta,$$

on parviendra à l'équation

$$\frac{d^2\Sigma}{dv^2} + \{A + i(2\omega + C + p)\}\frac{d\Sigma}{dv} + \{-\omega^2 + B - \omega C - \omega p + q + i[\omega A + D]\}\Sigma$$

$$+ pe^{-2iu}\left(-i\frac{d\xi}{dv} + \frac{d\eta}{dv}\right) + (-p\omega + q)e^{-2iu}(\xi + i\eta) = Me^{-iu} - iNe^{-iu}.$$

Les deux équations que nous venons de trouver s'écrivent aussi de la manière suivante:

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dv^2} + \{F - iG\}\dfrac{d\theta}{dv} + \{F_1 - iG_1\}\theta + ipe^{2iu}\dfrac{d\Sigma}{dv} - (p\omega - q)e^{2iu}\Sigma \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (M + iN)e^{iu}, \\ \dfrac{d^2\Sigma}{dv^2} + \{F + iG\}\dfrac{d\Sigma}{dv} + \{F_1 + iG_1\}\Sigma - ipe^{-2iu}\dfrac{d\theta}{dv} - (p\omega - q)e^{-2iu}\theta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (M - iN)e^{-iu}; \end{cases}$$

donc, elles forment évidemment un système symétrique.

Dans les équations que nous venons de signaler, on a employé les notations

$$F = A; \qquad F_1 = -\omega^2 + B - \omega C - \omega p + q;$$

$$G = 2\omega + C + p; \qquad G_1 = \omega A + D.$$

Concevons maintenant le système que forment les équations (22, d) et (22, e). En égalant χ_1 à x et χ_2 à y, nous aurons, en omettant le petit terme du deuxième ordre $2\beta P_{1.0}$:

$$A = P_{1.0}; \qquad B = -3 + 4\beta - P_{0.1} = -3 + 4\beta - \beta_1 - \beta_3 H - P',$$

$$C = 4; \qquad D = 2P_{1.0}; \qquad 2p = -4\beta; \qquad q = 0,$$

$$M = -P_{1.1}; \qquad N = -P_{2.0};$$

et si nous posons:

$$4\beta - \beta_1 - \beta_3 H = 3\bar{\beta},$$

$\bar{\beta}$ sera évidemment une quantité, à bien peu près égale à β ou à β_1.

Cela étant, nous allons déterminer la constante ω de manière que le coefficient G disparaisse. De cette condition, il résulte:

$$\omega = -2\left(1 - \frac{1}{2}\beta\right),$$

ce qui entraîne:

$$F_1 = 1 - \beta + 3(\bar{\beta} - \beta) - P'; \qquad G_1 = 2\beta P_{1.0}.$$

En négligeant, comme plus haut, cette dernière quantité, nous aurons les équations

$$\frac{d^2\theta}{dv^2} + P_{1.0}\frac{d\theta}{dv} + [1 - \beta + 3(\bar{\beta} - \beta) - P']\theta$$

$$- 2i\beta e^{-4i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}\frac{d\Sigma}{dv} - 4\beta\left(1 - \frac{1}{2}\beta\right)e^{-4i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}\Sigma$$

$$= -(P_{1.1} + iP_{2.0})e^{-2\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v},$$

$$\frac{d^2\Sigma}{dv^2} + P_{1.0}\frac{d\Sigma}{dv} + [1 - \beta + 3(\bar{\beta} - \beta) - P']\Sigma$$

$$+ 2i\beta e^{4i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}\frac{d\theta}{dv} - 4\beta\left(1 - \frac{1}{2}\beta\right)e^{4i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}\theta$$

$$= -(P_{1.1} - iP_{2.0})e^{2i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}.$$

Examinons ce que deviennent θ et Σ lorsqu'on suppose, dans $P_{1.1}$ et $P_{2.0}$, l'existence de termes dépendant d'arguments critiques. A cet effet, supposons que nous ayons:

$$P_{2.0} = (\gamma + \varepsilon)\cos[(1 - \sigma)v - B],$$

$$P_{1.1} = (\gamma - \varepsilon)\sin[(1 - \sigma)v - B]$$

et que le coefficient σ ait une valeur telle que la différence

$$\beta - 2\sigma$$

soit très petite par rapport à β.

Or, si l'on néglige les termes dépendant des parties périodiques, c'est-à-dire de $P_{1.0}$ et de P', ainsi que la différence $\bar{\beta} - \beta$, les équations précédentes deviendront:

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dv^2} + (1 - \beta)\theta - 2i\beta e^{-4i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}\dfrac{d\Sigma}{dv} - 4\beta e^{-4i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}\Sigma \\ \qquad = -i\{\gamma e^{-i[(1-\sigma)v-B]} + \varepsilon e^{i[(1-\sigma)v-B]}\}e^{-2i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}, \\ \dfrac{d^2\Sigma}{dv^2} + (1 - \beta)\Sigma + 2i\beta e^{4i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}\dfrac{d\theta}{dv} - 4\beta e^{4i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}\theta \\ \qquad = i\{\gamma e^{i[(1-\sigma)v-B]} + \varepsilon e^{-i[(1-\sigma)v-B]}\}e^{2i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}, \end{cases}$$

d'où l'on tire, en mettant:

$$\theta = -i\{\mu e^{-i[(3-\beta-\sigma)v-B]} + \nu e^{-i[(1-\beta+\sigma)v+B]}\},$$

$$\Sigma = i\{\mu e^{i[(3-\beta-\sigma)v-B]} + \nu e^{i[(1-\beta+\sigma)v+B]}\}.$$

les équations de condition:

$$\mu[-(3-\beta-\sigma)^2 + 1 - \beta] + 2\beta\nu(1+\beta-\sigma) = \gamma,$$

$$\nu[-(1-\beta+\sigma)^2 + 1 - \beta] - 2\beta\mu(1-\beta-\sigma) = \varepsilon.$$

De là il s'ensuit que le coefficient μ est une quantité très petite du même ordre que γ; quant au coefficient ν, on voit qu'il acquiert le même diviseur qui figure déjà dans χ_0. On conclut de là que l'élimination des fonctions χ_1 et χ_2, dans un cas critique, ne sera pas plus facile que ne l'a été celle de la fonction χ_0. Cependant, il ne se produira aucune complication ultérieure de notre équation résultante, vu que les termes dus aux fonctions χ_1 et χ_2 vont se rejoindre, après quelques opérations faciles, aux termes analogues dans χ_0, de sorte que toutes les trois fonctions dont il s'agit, s'uniront dans une seule.

Venons finalement aux deux premières des équations (22). En les comparant aux équations (31), on aura, si l'on néglige le terme du deuxième ordre, les valeurs

$$A = P_{1.0}; \qquad B = \beta - \beta_1 - \beta_3 H - P'; \qquad C = 2; \qquad D = P_{1.0},$$

$$2p = -2\beta; \qquad q = 0,$$

$$M = -P_{0.1}; \qquad N = -P_{1.0}.$$

Faisons d'abord $G = 0$, ce qui nous donne:

$$\omega = -\left(1 - \frac{1}{2}\beta\right),$$

et puis:

$$F_1 = 1 - \beta_1 - \beta_3 H - P'; \qquad G_1 = 0,$$

en négligeant toujours les quantités du deuxième ordre. Nous aurons ainsi, en omettant les coefficients périodiques, les équations

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H - P')\theta - i\beta e^{-i(2-\beta)v}\dfrac{d\Sigma}{dv} - \beta e^{-i(2-\beta)v}\Sigma \\ \qquad\qquad = (P' + iP_{1.0})e^{-i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}, \\ \dfrac{d^2\Sigma}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H - P')\Sigma + i\beta e^{i(2-\beta)v}\dfrac{d\theta}{dv} - \beta e^{i(2-\beta)v}\theta \\ \qquad\qquad = (P' - iP_{1.0})e^{i\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)v}. \end{cases}$$

Maintenant, si nous supposons:

$$P' + iP_{1.0} = \gamma e^{i(\bar\sigma v + A)}; \qquad P' - iP_{1.0} = \gamma e^{-i(\bar\sigma v + A)},$$

$\bar\sigma$ étant une quantité très petite par rapport à β, et γ un coefficient du deuxième ordre et du second degré, nous parviendrons au résultat que voici:

$$\theta = \mu e^{-i\left[\left(1-\frac{1}{2}\beta-\bar\sigma\right)v - A\right]} + \nu e^{-i\left[\left(1-\frac{1}{2}\beta+\bar\sigma\right)v + A\right]},$$

$$\Sigma = \mu e^{i\left[\left(1-\frac{1}{2}\beta-\bar\sigma\right)v - A\right]} + \nu e^{i\left[\left(1-\frac{1}{2}\beta+\bar\sigma\right)v + A\right]},$$

les coefficients μ et ν se déduisant en vertu des équations

$$\left[-\left(1 - \frac{1}{2}\beta - \bar\sigma\right)^2 + 1 - \beta_1 - \beta_3 H\right]\mu - \left(\frac{1}{2}\beta^2 - \beta\bar\sigma\right)\nu = \gamma,$$

$$\left[-\left(1 - \frac{1}{2}\beta + \bar\sigma\right)^2 + 1 - \beta_1 - \beta_3 H\right]\nu - \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \beta\bar\sigma\right)\mu = 0,$$

d'où l'on conclut facilement que les fonctions dont il s'agit peuvent acquérir des valeurs très grandes, la différence $\beta_1 - \beta$ étant très petite. Il s'ensuit de là que les transformations que nous venons d'indiquer dernièrement ne portent pas toujours au but proposé.

Mais si, dans un cas critique, il se trouvait impossible de faire disparaître entièrement les coefficients variables de E et de $\dfrac{dE}{dv}$, on pourrait du moins utiliser les équations (35) pour détruire une infinité de termes dans les fonctions P' et $P_{1.0}$, de sorte qu'on n'aurait retenu, dans les coefficients dont nous avons parlé, qu'un nombre fini de termes.

6. Dans le cas où l'on ne saurait annuler les quantités $A_{0.1}$ et $A_{1.0}$, ni les trois $A_{0.2}$, $A_{1.1}$, $A_{2.0}$ non plus, l'équation (17) prend la forme

$$(36)\quad \frac{d^2y}{dv^2} + [1 - \beta_1 - \beta_3(H)^2 - \Psi]y + \left(\Phi + p\frac{d(H)^2}{dv}\right)\frac{dy}{dv} + \beta_0\chi_0(H)^2 = \Omega,$$

où l'on a mis en évidence les termes dépendant de $(H)^2$, fonction qui est donnée par la formule

$$(H)^2 = (1 - \beta)y^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2.$$

Dans l'équation que nous venons de signaler, on a désigné par Ψ et Φ deux fonctions connues ne contenant qu'un nombre fini de termes purement périodiques, la première consistant exclusivement des termes en cosinus, la seconde des termes en sinus; les coefficients p et β_0 sont des constantes, le premier de l'ordre zéro, le second du premier ordre, et tous les deux du degré zéro. Nous supposons enfin, qu'on n'ait retenu, dans la fonction χ_0, qu'un nombre fini de termes.

Maintenant, si nous remplaçons la fonction y par une autre z, et la variable indépendante v, par une autre u, et que nous supposions les relations suivantes:

$$y = \frac{z}{1 + \psi}; \qquad dv = \frac{e^{\int \Phi dv}}{(1 + \psi)^2}du,$$

ψ étant une fonction dont nous pouvons disposer à volonté, nous aurons d'abord:

$$\frac{dy}{dv} = \left\{\frac{dz}{du}(1 + \psi) - z\frac{d\psi}{du}\right\}e^{-\int \Phi dv},$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} = \left\{\frac{d^2z}{du^2}(1 + \psi) - z\frac{d^2\psi}{du^2}\right\}(1 + \psi)^2 e^{-2\int \Phi dv}$$
$$- \Phi\left\{\frac{dz}{du}(1 + \psi) - z\frac{d\psi}{du}\right\}e^{-\int \Phi dv}.$$

et ensuite, en introduisant les expressions obtenues dans l'équation (36):

$$(37)\quad \frac{d^2z}{du^2} + \left\{-\frac{1}{1 + \psi}\frac{d^2\psi}{du^2} + [1 - \beta_1 - \beta_3(H)^2 - \Psi]\frac{e^{2\int \Phi dv}}{(1 + \psi)^4}\right\}z$$
$$+ \frac{\beta_0\chi_0(H)^2}{(1 + \psi)^3}e^{2\int \Phi dv} = \frac{\Omega}{(1 + \psi)^3}e^{2\int \Phi dv}.$$

Dans cette équation, on a omis le terme dépendant de $\frac{d(H)^2}{dv}$, vu qu'il doit être considéré, le cas étant critique, comme une quantité du cinquième degré.

Cela étant, nous allons déterminer la fonction ψ de manière que la condition

$$(38)\qquad -\frac{1}{1+\psi}\frac{d^2\psi}{du^2}+[1-\beta_1-\beta_3(H)^2-\Psi]\frac{e^{2\int\Phi dv}}{(1+\psi)^4}=1-\beta_1-\beta_3\eta^2$$

soit satisfaite; on a employé la notation

$$\eta^2=(1-\beta)z^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2.$$

En supposant de plus que $(H)^2$ ainsi que η^2 soient des quantités du deuxième degré, nous aurons, vu que ψ est évidemment une fonction à longue période dont la seconde dérivée est une quantité du second ordre et au moins du second degré, la relation approchée:

$$(1+\psi)^2=e^{\int\Phi dv}.$$

Si l'on introduit cette expression dans la formule

$$\begin{aligned}(H)^2&=(1-\beta)y^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2\\&=(1-\beta)\frac{z^2}{(1+\psi)^2}+\left(\frac{dz}{du}\right)^2(1+\psi)^2e^{-2\int\Phi dv},\end{aligned}$$

il viendra:

$$(H)^2=\eta^2e^{-\int\Phi dv},$$

et l'on prévoit aisément que l'erreur de cette relation ne surpasse pas une quantité du quatrième degré.

En utilisant la relation trouvée, et en établissant les notations

$$\chi=\frac{\chi_0}{1+\psi};\qquad(\Omega)=\frac{\Omega}{(1+\psi)^3}e^{2\int\Phi dv},$$

on parvient, eu égard à l'équation (38), au résultat que voici:

$$(39)\qquad \frac{d^2z}{du^2}+(1-\beta_1-\beta_3\eta^2)z+\beta_0\chi\eta^2=(\Omega).$$

Telle est l'équation qu'il nous reste à intégrer; mais avant que de nous occuper de cette tâche, revenons à l'intégration de l'équation (38).

Si l'on écrit la dite équation de la manière suivante:

$$(40)\quad \frac{d^2\psi}{du^2} - \frac{1-\beta_1}{(1+\psi)^3} e^{2\int \Phi dv} + (1-\beta_1)(1+\psi) = \beta_3 \eta^2 (1+\psi) - [\beta_3 (H)^2 + \Psi] \frac{e^{2\int \Phi dv}}{(1+\psi)^3},$$

on pourra tout de suite, aux termes du membre de droite, appliquer les relations approchées entre $\int \Phi dv$ et ψ, et entre $(H)^2$ et η^2 que nous venons d'obtenir tout à l'heure. Mais puisque les fonctions Φ et Ψ sont données au moyen de v, tandis que la variable indépendante de notre équation est u, il faudrait d'abord changer la variable d'où dépendent les arguments. Cependant, la différence $v - u$ ne contenant que des termes périodiques, on peut mettre, tout simplement, u au lieu de v dans les arguments de la forme

$$\bar{\sigma} v + A_1,$$

le coefficient $\bar{\sigma}$ étant une quantité du premier ordre et, dans les cas critiques, du second degré.

En effet, si nous admettons le développement

$$e^{2\int \Phi dv} = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\sigma_1 v + A_1) + \alpha_2 \cos(\sigma_2 v + A_2) + \ldots,$$

qui est nécessairement convergent, même si $\int \Phi dv$ est une quantité de l'ordre zéro, et que nous y posions:

$$v = u + U,$$

nous aurons immédiatement:

$$\begin{aligned} e^{2\int \Phi dv} = & \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\bar{\sigma}_1 u + A_1) + \alpha_2 \cos(\bar{\sigma}_2 u + A_2) + \ldots \\ & - \{\bar{\sigma}_1 \alpha_1 \sin(\bar{\sigma}_1 u + A_1) + \bar{\sigma}_2 \alpha_2 \sin(\bar{\sigma}_2 u + A_2) + \ldots\} U \\ & - \{\bar{\sigma}_1^2 \alpha_1 \cos(\bar{\sigma}_1 u + A_1) + \bar{\sigma}_2^2 \alpha_2 \cos(\bar{\sigma}_2 u + A_2) + \ldots\} \frac{U^2}{1.2} \\ & + \ldots, \end{aligned}$$

d'où il est visible que les parties dépendant des puissances de U sont peu considérables relativement aux termes de la première ligne, la fonction U étant considérée comme une quantité de l'ordre zéro.

En calculant la fonction U au moyen de la formule

$$U = \int \left\{ \frac{e^{\int \Phi dv}}{(1+\psi)^2} - 1 \right\} du,$$

on ne saurait éviter la naissance d'un terme séculaire, ce qui ne doit pas, cependant, se produire. Il ne sera pas difficile, toutefois, de se mettre à l'abri d'un tel inconvénient. En effet, il ne faut qu'ajouter au membre de droite de l'équation (38) une constante, ν, qu'on peut choisir de façon à détruire le terme séculaire dont nous avons parlé.

Maintenant, après avoir établi la notation

$$e^{2\int \Phi dv} = \alpha + W,$$

où la fonction W ne renferme que des termes périodiques, nous mettons l'équation (40) sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\psi}{du^2} + \Bigg\{ 3\alpha(1-\beta_1) + 1 - \beta_1 + \nu - \beta_3 \left[\eta^2 - (H)^2 \frac{e^{2\int \Phi dv}}{(1+\psi)^4} \right] \\
+ 3(1-\beta_1)W + \Psi \frac{e^{2\int \Phi dv}}{(1+\psi)^4} \Bigg\} \psi = (\alpha + W - 1)(1-\beta_1) - \nu \\
+ \beta_3 \left(\eta^2 - (H)^2 \frac{e^{2\int \Phi dv}}{(1+\psi)^4} \right) - \Psi \frac{e^{2\int \Phi dv}}{(1+\psi)^4} \\
+ 6(1-\beta_1)(\alpha + W)\psi^2 - \ldots .
\end{aligned}$$

Quant à cette équation, il s'entend facilement, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans les détails, comment on opère son intégration au moyen d'approximations successives. J'ajouterai l'observation que, selon l'hypothèse, les fonctions η^2, $(H)^2$ et Ψ ne contiennent que des termes à longue période ou bien des termes constants: un tel terme passera évidemment, sans être essentiellement agrandi, dans l'intégrale de l'équation (40).

7. Toutes les fois qu'il s'agit d'un cas critique, l'intégration de l'équation (39) est, comme on le comprend à la première inspection, extrêmement difficile. Nulle espérance d'en trouver la solution sous forme d'un développement, ni suivant les puissances des forces perturbatrices ni suivant celles des excentricités ou des inclinaisons. Mais il paraît même manquer toute possibilité de retrancher directement, de l'équation dont il s'agit, quelque partie de manière que le reste soit convenable à l'intégration, tandis que l'influence de la partie retranchée soit assez petite pour être négligée d'abord. Il faut donc recourir à de nouvelles transformations.

Pour préparer un peu le terrain, posons:

$$z = z_0 + z_1,$$

ce qui changera l'équation (39) en la suivante:

$$\frac{d^2z_0}{du^2} + \frac{d^2z_1}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3\eta^2)(z_0 + z_1) + \beta_0\chi\eta^2 = (\Omega).$$

Puisque l'une des fonctions z_0 et z_1 est entièrement arbitraire, nous pouvons la déterminer par l'équation

$$\beta_3 z_1 = \beta_0\chi,$$

ce qui entraîne:

$$\frac{d^2z_0}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3\eta^2)z_0 = (\Omega) - (1 - \beta_1)\frac{\beta_0}{\beta_3}\chi - \frac{\beta_0}{\beta_3}\frac{d^2\chi}{du^2}.$$

Toute la partie à droite est connue: selon notre supposition, (Ω) est une quantité du troisième degré, si le cas est critique, et on s'aperçoit facilement que les termes critiques dans la somme

$$(1 - \beta_1)\chi + \frac{d^2\chi}{du^2}$$

sont aussi des quantités du troisième degré.

Il paraît à la première inspection que l'équation en z_0 est bien simple; néanmoins son intégration présente de très graves difficultés. Afin de

les aplanir, nous allons remplacer η^2 par deux nouvelles fonctions, η_0 et η_1, dont la seconde soit connue. Dans ce but, posons:

$$z_0 = \eta_0 \cos[(1 - \sigma_0)u - B_0 - \pi_0]; \qquad z_1 = \eta_1 \cos[(1 - \sigma_1)u - B_1 - \pi_1],$$

$\eta_1 \cos \pi_1$ et $\eta_1 \sin \pi_1$ étant deux fonctions connues. Nous admettons ensuite, ce qui est d'accord avec la supposition d'un cas critique, que la différence $\sigma_0 - \sigma_1$ soit extrêmement petite, de sorte que l'on ait:

$$\sigma_0 - \sigma_1 \mathrel{\underline{\circ}} \sigma_0 \eta^2,$$

hypothèse à laquelle nous ajoutons la suivante:

$$\beta - 2\sigma_0 \mathrel{\underline{\circ}} \beta - 2\sigma_1 \mathrel{\underline{\circ}} \sigma_0 \eta^2.$$

Avant d'aller plus loin, voici quelques relations entre les fonctions $z_0, z_1, \frac{dz_0}{du}, \frac{dz_1}{du}$ d'un côté et $\eta_0, \eta_1, \pi_0, \pi_1$ de l'autre.

Après avoir fait, pour abréger:

$$(1 - \sigma_0)u - B_0 = \mathrm{f}_0 \quad ; \qquad (1 - \sigma_1)u - B_1 = \mathrm{f}_1,$$

$$\mathrm{f}_0 - \pi_0 = \mathrm{F}_0 \quad ; \qquad \mathrm{f}_1 - \pi_1 = \mathrm{F}_1,$$

$$\eta_0 \cos \pi_0 = \mathrm{g}_0 \quad ; \qquad \eta_1 \cos \pi_1 = \mathrm{g}_1,$$

$$\eta_0 \sin \pi_0 = \mathrm{h}_0 \quad ; \qquad \eta_1 \sin \pi_1 = \mathrm{h}_1,$$

$$\cos \mathrm{f}_0 \frac{d\mathrm{g}_0}{du} + \sin \mathrm{f}_0 \frac{d\mathrm{h}_0}{du} = (\lambda)_0; \qquad \cos \mathrm{f}_1 \frac{d\mathrm{g}_1}{dv} + \sin \mathrm{f}_1 \frac{d\mathrm{h}_1}{dv} = (\lambda)_1,$$

nous aurons:

$$\frac{dz_0}{du} = -(1 - \sigma_0)\eta_0 \sin \mathrm{F}_0 + (\lambda)_0;$$

$$\frac{dz_1}{du} = -(1 - \sigma_1)\eta_1 \sin \mathrm{F}_1 + (\lambda)_1.$$

Les fonctions $(\lambda)_0$ et $(\lambda)_1$ étant ordinairement du premier ordre et du premier degré, dans les cas critiques même du troisième degré, on peut, le plus souvent, les négliger à côté de η_0 et η_1. Il y a cependant des formules où l'on doit, inévitablement, les retenir.

Cela étant, il sera facile d'établir les formules que voici:

$$z_0 = g_0 \cos f_0 + h_0 \sin f_0; \qquad \frac{dz_0}{du} = -(1-\sigma_0)(g_0 \sin f_0 - h_0 \cos f_0) + (\lambda)_0,$$

$$(1-\sigma_0) g_0 = (1-\sigma_0) z_0 \cos f_0 - \frac{dz_0}{du} \sin f_0 + (\lambda)_0 \sin f_0,$$

$$(1-\sigma_0) h_0 = (1-\sigma_0) z_0 \sin f_0 + \frac{dz_0}{du} \cos f_0 - (\lambda)_0 \cos f_0,$$

$$(1-\sigma_0)^2 \eta_0^2 = (1-\sigma_0)^2 z_0^2 + \left(\frac{dz_0}{du}\right)^2 - 2\frac{dz_0}{du}(\lambda)_0 + (\lambda)_0^2,$$

ainsi que des formules toutes semblables donnant g_1, h_1 et η_1^2.

En désignant par w la différence

$$F_0 - F_1 = (\sigma_1 - \sigma_0) u + B_1 - B_0 + \pi_1 - \pi_0,$$

nous aurons ensuite:

$$(1-\beta) z_0 z_1 + \frac{dz_0}{du}\frac{dz_1}{du} = (1-\beta)\eta_0\eta_1 \cos w + (\beta - 2\sigma + \sigma_0\sigma_1)\eta_0\eta_1 \sin F_0 \sin F_1$$
$$- [(1-\sigma_0)(\lambda)_1 \eta_0 \sin F_0 + (1-\sigma_1)(\lambda)_0 \eta_1 \sin F_1] + (\lambda)_0 (\lambda)_1,$$

$$(1-\sigma)\left\{z_0 \frac{dz_1}{du} - z_1 \frac{dz_0}{du}\right\} = (1-\beta)\eta_0\eta_1 \sin w + (\beta - 2\sigma + \tau + \sigma_0\sigma)\eta_0\eta_1 \sin F_0 \cos F_1$$
$$- (\beta - 2\sigma - \tau + \sigma_1\sigma)\eta_0\eta_1 \cos F_0 \sin F_1$$
$$+ (1-\sigma)\{(\lambda)_1 \eta_0 \cos F_0 - (\lambda)_0 \eta_1 \cos F_1\},$$

où l'on a employé les notations

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2}; \qquad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{2}.$$

Nous ajouterons encore quelques relations qui nous seront utiles prochainement; les voici:

$$\eta_0\eta_1 \cos w = (g_0 g_1 + h_0 h_1) \cos(f_0 - f_1) + (h_0 g_1 - g_0 h_1) \sin(f_0 - f_1),$$
$$\eta_0\eta_1 \sin w = (g_0 g_1 + h_0 h_1) \sin(f_0 - f_1) - (h_0 g_1 - g_0 h_1) \cos(f_0 - f_1)$$

ou bien:

$$\eta_0\eta_1 e^{iw} = \{g_0 g_1 + h_0 h_1 - i(h_0 g_1 - g_0 h_1)\} e^{i(f_0 - f_1)}.$$

Nous allons employer, plus loin, la notation

$$f_0 - f_1 = \vartheta;$$

il conviendra alors de se rappeler la relation

$$\frac{d\vartheta}{du} = 2\tau.$$

En vertu des formules que nous venons de signaler, il sera maintenant facile d'établir la suivante, où l'on a négligé les termes du premier ordre, ce qui convient à l'usage que nous allons en faire,

$$\eta^2 = \eta_0^2 + \eta_1^2 + 2\eta_0\eta_1 \cos w.$$

En portant cette valeur de η^2 dans l'équation en z_0 que nous venons de donner dans le commencement du numéro présent, nous aurons, après avoir établi la notation

$$\Omega' = (\Omega) - (1 - \beta_1)\frac{\beta_0}{\beta_3}\chi - \frac{\beta_0}{\beta_3}\frac{d^2\chi}{du^2},$$

l'équation suivante en z_0:

$$\frac{d^2 z_0}{du^2} + \{1 - \beta_1 - \beta_3(\eta_0^2 + 2\eta_0\eta_1 \cos w + \eta_1^2)\} z_0 = \Omega'. \tag{41}$$

8. En partant de l'équation (41), il y aura lieu de supposer le développement que voici:

$$\begin{aligned} z_0 = U_0 &+ U_1 \cos w + U_2 \cos 2w + \dots \\ &+ T_1 \sin w + T_2 \sin 2w + \dots . \end{aligned}$$

De cette forme, il découle immédiatement:

$$\begin{aligned} \frac{dz_0}{du} = &\sum \left\{\frac{dU_n}{du}\cos nw + \frac{dT_n}{du}\sin nw\right\} \\ &+ \sum\{-nU_n \sin nw + nT_n \cos nw\}\frac{dw}{du}, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 z_0}{du^2} = \sum \left\{ \frac{d^2 U_n}{du^2} \cos n\mathrm{w} + \frac{d^2 T_n}{du^2} \sin n\mathrm{w} \right\}$$

$$+ 2\sum \left\{ - n \frac{dU_n}{du} \sin n\mathrm{w} + n \frac{dT_n}{du} \cos n\mathrm{w} \right\} \frac{d\mathrm{w}}{du}$$

$$- \sum \{ n^2 U_n \cos n\mathrm{w} + n^2 T_n \sin n\mathrm{w} \} \left(\frac{d\mathrm{w}}{du}\right)^2$$

$$+ \sum \{ - nU_n \sin n\mathrm{w} + nT_n \cos n\mathrm{w} \} \frac{d^2\mathrm{w}}{du^2}.$$

En introduisant, avec le développement admis de z_0, cette expression de la deuxième dérivée dans l'équation (41), il en résultera:

$$\frac{d^2 U_0}{du^2} + \{ 1 - \beta_1 - \beta_3(\eta_0^2 + \eta_1^2) \} U_0 - \beta_3 \eta_0 \eta_1 U_1 = \Omega',$$

$$\frac{d^2 U_1}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - \left(\frac{d\mathrm{w}}{du}\right)^2 - \beta_3(\eta_0^2 + \eta_1^2) \right\} U_1 + 2\frac{dT_1}{du}\frac{d\mathrm{w}}{du} + T_1 \frac{d^2\mathrm{w}}{du^2}$$
$$- \beta_3 \eta_0 \eta_1 (2U_0 + U_2) = 0,$$

$$\frac{d^2 T_1}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - \left(\frac{d\mathrm{w}}{du}\right)^2 - \beta_3(\eta_0^2 + \eta_1^2) \right\} T_1 - 2\frac{dU_1}{du}\frac{d\mathrm{w}}{du} - U_1 \frac{d^2\mathrm{w}}{du^2}$$
$$- \beta_3 \eta_0 \eta_1 T_2 = 0,$$

$$\frac{d^2 U_2}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - 2^2\left(\frac{d\mathrm{w}}{du}\right)^2 - \beta_3(\eta_0^2 + \eta_1^2) \right\} U_2 + 4\frac{dT_2}{du}\frac{d\mathrm{w}}{du} + 2T_2 \frac{d^2\mathrm{w}}{du^2}$$
$$- \beta_3 \eta_0 \eta_1 (U_1 + U_3) = 0,$$

$$\frac{d^2 T_2}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - 2^2\left(\frac{d\mathrm{w}}{du}\right)^2 - \beta_3(\eta_0^2 + \eta_1^2) \right\} T_2 - 4\frac{dU_2}{du}\frac{d\mathrm{w}}{du} - 2U_2 \frac{d^2\mathrm{w}}{du^2}$$
$$- \beta_3 \eta_0 \eta_1 (T_1 + T_3) = 0,$$

. . . .

Ces équations, deux formant toujours un couple (à l'exception des trois premières), on peut les réunir dans une seule équation du second ordre en posant:

$$Z_n = U_n + iT_n.$$

Le type général des équations qu'on obtient ainsi devient:

$$(42)\quad \frac{d^2Z_n}{du^2}+\left\{1-\beta_1-n^2\left(\frac{d\mathrm{w}}{du}\right)^2-\beta_3(\eta_0^2+\eta_1^2)\right\}Z_n-2ni\frac{d\mathrm{w}}{du}\frac{dZ_n}{du}-ni\frac{d^2\mathrm{w}}{du^2}Z_n$$
$$-\beta_3\eta_0\eta_1(Z_{n-1}+Z_{n+1})=0;$$

et de cette équation, on en peut tirer une autre, que je tiens pour la plus convenable aux recherches sur la convergence du développement proposé pour représenter la fonction z_0. Afin d'y arriver, posons:

$$Z_n=\zeta_n e^{in(\mathrm{w}-\vartheta)}.$$

En introduisant ζ_n au lieu de Z_n, dans l'équation précédente, il viendra:

$$\frac{d^2\zeta_n}{du^2}+\left\{1-\beta_1-n^2\left(\frac{d\vartheta}{du}\right)^2-\beta_3(\eta_0^2+\eta_1^2)\right\}\zeta_n-2ni\frac{d\vartheta}{du}\frac{d\zeta_n}{du}$$
$$-\beta_3\eta_0\eta_1\{\zeta_{n-1}e^{-i(\mathrm{w}-\vartheta)}+\zeta_{n+1}e^{i(\mathrm{w}-\vartheta)}\}=0.$$

Mais puisqu'on a:

$$\eta_0\eta_1e^{i(\mathrm{w}-\vartheta)}=\mathrm{g}_0\mathrm{g}_1+\mathrm{h}_0\mathrm{h}_1-i(\mathrm{h}_0\mathrm{g}_1-\mathrm{g}_0\mathrm{h}_1),$$
$$\eta_0\eta_1e^{-i(\mathrm{w}-\vartheta)}=\mathrm{g}_0\mathrm{g}_1+\mathrm{h}_0\mathrm{h}_1+i(\mathrm{h}_0\mathrm{g}_1-\mathrm{g}_0\mathrm{h}_1),$$
$$\frac{d\vartheta}{du}=2\tau,$$

l'équation demandée prendra la forme que voici:

$$(43)\quad \frac{d^2\zeta_n}{du^2}+\left\{1-\beta_1-4n^2\tau^2-\beta_3(\eta_0^2+\eta_1^2)\right\}\zeta_n-4in\tau\frac{d\zeta_n}{du}$$
$$=\beta_3(\mathrm{g}_0\mathrm{g}_1+\mathrm{h}_0\mathrm{h}_1)(\zeta_{n-1}+\zeta_{n+1})-i\beta_3(\mathrm{h}_0\mathrm{g}_1-\mathrm{g}_0\mathrm{h}_1)(\zeta_{n-1}-\zeta_{n+1}).$$

De cette équation, deux choses sont faciles à conclure: d'abord, que les fonctions ζ_n ne peuvent aucunement devenir plus grandes qu'une quantité du premier degré, vu que η_0^2 contient les carrés de tous les coefficients dans ces fonctions; et puis, que les fonctions dont il s'agit, lorsque n devient si grand que le produit $n\tau$ surpasse l'unité, décroissent de manière à former une série convergente.

Pour corroborer cette dernière assertion, négligeons la fonction ζ_{n+1}, et supposons qu'on connaisse ζ_{n-1}, dont la valeur ne saurait surpasser une

quantité du premier degré, ainsi que les expressions approchées de g_0, g_1, h_0 et h_1.

Concevons maintenant un terme du second membre, désignons-le par:

$$\gamma e^{i\lambda u},$$

et négligeons la partie périodique de $\eta_0^2 + \eta_1^2$. En vertu de l'équation précédente, on obtient facilement l'expression suivante du terme demandé dans ζ_n, la voici:

$$\zeta_n = -\frac{\gamma e^{i\lambda u}}{\lambda^2 + 4n^2\tau^2 - 1 + \beta_1 - 4n\tau\lambda + \beta_3(H_0 + H_1)}.$$

Par $H_0 + H_1$ on a désigné la partie constante de $\eta_0^2 + \eta_1^2$.

Certes, le coefficient γ est une quantité du premier ordre et tout au moins du troisième degré, mais il peut être affecté d'un facteur très grand, dont la valeur n'atteint pas, cependant, celle de n. On a toutefois obtenu un résultat qu'on peut considérer comme très petit, même par rapport à une quantité du premier degré. A partir d'un tel résultat relativement à ζ_n, la convergence des fonctions $\zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \ldots$ sera évidemment très rapide.

9. Pour le calcul effectif de la fonction z_0, la méthode dont nous venons de faire l'exposition n'est pas suffisamment aisée, vu qu'elle exige des approximations successives et en même temps renouvelées. Nul doute qu'on ne puisse en tirer, en employant certains procédés de tâtonnements, des règles pour calculer les coefficients dans la fonction demandée, mais dans le cas où il ne s'agit que d'une solution approchée, on peut atteindre le but d'une manière plus directe.

Reprenons l'équation (39), et admettons-y le développement

$$z = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots. \tag{44}$$

Puis, si nous désignons par $l^{(0)}, l^{(1)}, \ldots, l_1^{(0)}, l_2^{(0)}, \ldots, l_2^{(1)}, l_3^{(1)}, \ldots$ des constantes encore disponibles, du premier ordre et du second degré, liées entre elles par les relations suivantes:

$$l^{(0)} = l_1^{(0)} + l_2^{(0)} + l_3^{(0)} + \ldots,$$
$$l^{(1)} = l_2^{(1)} + l_3^{(1)} + l_4^{(1)} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

l'équation (39) peut se remplacer immédiatement par le système que voici:

$$(45)\quad\begin{cases}\dfrac{d^2V_0}{du^2}+(1-\beta_1-l^{(0)})V_0=(\Omega),\\[2mm]\dfrac{d^2V_1}{du^2}+(1-\beta_1-l^{(1)})V_1=(\beta_3\eta^2-l_1^{(0)})V_0-\beta_0\eta^2\chi,\\[2mm]\dfrac{d^2V_2}{du^2}+(1-\beta_1-l^{(2)})V_2=(\beta_3\eta^2-l_2^{(1)})V_1-l_2^{(0)}V_0,\\[2mm]\dfrac{d^2V_3}{du^2}+(1-\beta_1-l^{(3)})V_3=(\beta_3\eta^2-l_3^{(2)})V_2-l_3^{(1)}V_1-l_3^{(0)}V_0,\\[2mm]\text{etc.}\end{cases}$$

Du développement (44), on tire facilement la formule

$$(46)\quad \eta^2=(1-\beta)\{V_0^2+V_1^2+\ldots+2V_0V_1+\ldots+2V_1V_2+\ldots\}$$
$$+\left\{\left(\frac{dV_0}{du}\right)^2+\left(\frac{dV_1}{du}\right)^2+\ldots+2\frac{dV_0}{du}\frac{dV_1}{du}+2\frac{dV_0}{du}\frac{dV_2}{du}+\ldots\right\},$$

à l'aide de laquelle on peut intégrer le système (45).

Voici la marche à suivre:

La première des équations (45) s'intègre tout-de-suite; seulement, la constante $l^{(0)}$ n'étant pas encore déterminée, les coefficients du résultat contiendront cette quantité comme symbole algébrique. La fonction V_0 étant connue, du moins quant à la forme, on établira la fonction η^2 en mettant:

$$\eta^2=(1-\beta)V_0^2+\left(\frac{dV_0}{du}\right)^2.$$

En passant, avec cette valeur préalable de η^2, à la deuxième des équations (45), on aura d'abord l'occasion de déterminer la partie $l_1^{(0)}$ de $l^{(0)}$. Le but qu'on a poursuivi avec cette arbitraire, est évidemment de rendre la valeur du second membre de cette équation aussi petite que possible. Le plus naturel est sans doute de mettre:

$$l_1^{(0)}=\beta_3H,$$

H étant la partie constante de η^2, mais une autre détermination peut

quelquefois se présenter plus favorable. Quoi qu'il en soit, la constante $l^{(0)}$, renferme la partie $\beta_3 H$, mais peut encore contenir d'autres termes.

Cela posé, on détermine la fonction V_1, ce qui est maintenant très facile; on aura ensuite une nouvelle détermination de η^2, avec laquelle on pourra renouveler l'intégration de l'équation en V_1, et on sera arrivé à la troisième des équations (45).

Il s'agit, avant tout, de la détermination des constantes $l_2^{(1)}$ et $l_2^{(0)}$. Le principe général du choix des constantes l est toujours le même: c'est de les déterminer de manière que la somme des termes du membre à droite soit la plus petite possible, et que la réapparition dans les divers V_n d'un certain argument soit évitée le plus possible.

Au fur et à mésure qu'on avance, dans la détermination des fonctions V_n, le nombre des constantes à choisir devient plus grand. Donc, plus l'indice de la fonction cherchée est grand, plus on aura des constantes à sa disposition pour modeler convenablement le second membre.

Mais ce qui est indispensable, c'est que les constantes $l^{(0)}, l^{(1)}, \dots$ renferment le terme $\beta_3 H$.

De la manière indiquée, on peut déterminer les fonctions V_n de proche en proche en renouvelant, autant qu'il sera nécessaire, le calcul dès le commencement.

Mais contre le mode du calcul indiqué tout à l'heure, on pourrait faire la même objection que nous venions de signaler, lorsque il s'agissait de la méthode du paragraphe précédent. L'inconvénient dont nous avons parlé tient à ce que les équations (45) s'intégrant de proche en proche, ne donnent pas, immédiatement, la valeur complète de la fonction cherchée, mais qu'on est obligé de recommencer le calcul, chaque fois q'une nouvelle valeur de η^2, plus exacte que la précédente, a été atteinte. Après avoir introduit l'expression de η^2 selon l'équation (46), on évitera cet inconvénient en changeant la répartition des divers termes connus sur les différentes équations.

En faisant:

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots,$$

on reconnaîtra facilement l'identité de la somme des équations suivantes avec l'équation (39):

$$
(47)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2 V_0}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H) V_0 = (\Omega), \\
&\frac{d^2 V_1}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H) V_1 = \quad \beta_3 \left\{ (1-\beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 - H_0 \right\} V_0 \\
&\qquad\qquad - \beta_0 \left\{ (1-\beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 \right\} \chi, \\
&\frac{d^2 V_2}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H) V_2 = \quad \beta_3 \left\{ (1-\beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 - H_0 \right\} V_1 \\
&\qquad\qquad + \beta_3 \left\{ (1-\beta) V_1^2 + \left(\frac{dV_1}{du}\right)^2 + 2(1-\beta) V_0 V_1 \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + 2 \frac{dV_0}{du} \frac{dV_1}{du} - H_1 \right\} (V_0 + V_1) \\
&\qquad\qquad - \beta_0 \left\{ (1-\beta)(V_1^2 + 2 V_0 V_1) + \left(\frac{dV_1}{du}\right)^2 \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + 2 \frac{dV_0}{du} \frac{dV_1}{du} \right\} \chi \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

Pourvu qu'on ait calculé les fonctions précédentes, les seconds membres des équations (47) sont immédiatement connus, abstraction faite des facteurs dépendant de la constante H.

Quelquefois on pourra opérer les approximations encore plus avantageusement en remplaçant le système précédent par celui-ci:

$$
(48)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2 V_0}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - \beta_3 \left[(1-\beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 + H - H_0 \right] \right\} V_0 = (\Omega), \\
&\frac{d^2 V_1}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - \beta_3 \left[(1-\beta) V_1^2 + \left(\frac{dV_1}{du}\right)^2 + H - H_1 \right] \right\} V_1 = -\beta_0 \left\{ (1-\beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 \right\} \chi, \\
&\frac{d^2 V_2}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - \beta_3 \left[(1-\beta) V_2^2 + \left(\frac{dV_2}{du}\right)^2 + H - H_2 \right] \right\} V_2 = \quad \beta_3 \left\{ (1-\beta) V_1^2 + \left(\frac{dV_1}{du}\right)^2 - H_1 \right\} V_0 \\
&\qquad + \beta_3 \left\{ (1-\beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 - H_0 \right\} V_1 + 2\beta_3 \left\{ (1-\beta) V_0 V_1 + \frac{dV_0}{du} \frac{dV_1}{du} \right\} (V_0 + V_1) \\
&\qquad - \beta_0 \left\{ (1-\beta) V_1^2 + \left(\frac{dV_1}{du}\right)^2 + 2\left((1-\beta) V_0 V_1 + \frac{dV_0}{du} \frac{dV_1}{du} \right) \right\} \chi \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

C'est surtout lorsque les fonctions (Ω) et χ sont restreintes à ne contenir, chacune, qu'un seul terme prépondérant que l'emploi des équations (48) se montre extrêmement favorable. En effet, dans ce cas les fonctions $(1-\beta)V_0^2+\left(\frac{dV_0}{du}\right)^2$ et $(1-\beta)V_1^2+\left(\frac{dV_1}{du}\right)^2$ se réduisent à des constantes, du moins à des fonctions où les parties variables sont très petites par rapport aux parties constantes, de sorte que les deux premières fonctions s'obtiennent presque immédiatement.

§ 6. *Equations avec termes trigonométriques dont les arguments dépendent de la fonction cherchée.*

1. L'équation fondamentale que je vais traiter dans le paragraphe présent, est, quant à son type, une généralisation de celle que j'ai examinée dans mon mémoire de 1887, et dont l'intégrale donne l'expression des grandes inégalités des planètes.

L'équation générale dont il s'agit contient des termes de deux genres: les uns dépendent des anomalies des planètes ou des arguments astronomiques qui les remplacent, les autres ne renferment, dans les arguments, que les longitudes des périhélies et des noeuds. Les termes du premier genre contiennent encore, dans les arguments, la somme de toutes les inégalités multipliée par un facteur de l'ordre zéro, tandis que cette somme ne figure, dans les arguments des termes du second espèce, que multipliée par un coefficient de l'ordre des forces troublantes. Les termes du second genre donnent naissance aux termes élémentaires se réduisant à des constantes, lorsque les masses troublantes s'annulent.

Dans mes travaux précédents, j'ai considéré séparément ces deux espèces de termes, et j'ai réussi d'assigner une limite supérieure aux inégalités dépendant des anomalies. De là, on pouvait même conclure, du moins dans le cas de deux arguments, la convergence des dits termes, vu que la suite de leurs limites supérieures se montrait convergente.

Quant aux termes élémentaires, il ne fut pas possible, ni de démontrer leur convergence, ni d'en obtenir la valeur avec une exactitude illimitée. Seulement, dans les cas les plus faciles, on a pu calculer, d'une manière bien simple, les coefficients de ces termes, et on a obtenu

des résultats qui, on peut l'admettre, ne sont pas trop différents des valeurs exactes.

Dans les recherches suivantes, on a considéré les deux genres de termes simultanément, ou bien: on a eu égard aux termes de la première espèce, en formant l'équation différentielle d'où s'obtiennent les termes élémentaires.

En désignant par $s_0, s_1, \ldots$ des nombres entiers quelconques, que nous pouvons d'ailleurs supposer positifs, et par $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ des quantités dépendant de ces entiers ainsi que des rapports entre les mouvements moyens des arguments astronomiques, enfin par les symboles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ des quantités aussi dépendant de nombres entiers et d'arguments astronomiques, mais seulement d'une manière telle que les divers σ ne renferment que les rapports des mouvements des apsides et des noeuds au mouvement de l'argument v, de sorte que les σ sont de l'ordre des forces perturbatrices, nous allons considérer l'équation du deuxième ordre:

$$\frac{d^2T}{dv^2} = -A_0 \sin(G_0 + s_0 T) - X_1 - \Omega_1, \tag{1}$$

les fonctions X_1 et Ω_1 étant données au moyen des développements

$$\begin{aligned} X_1 = {} & A_1 \sin(G_1 + s_1 T) + A_2 \sin(G_2 + s_2 T) + \ldots \\ & + \{A_0' \sin(G_0 + s_0 T) + A_1' \sin(G_1 + s_1 T) + \ldots\}\frac{dT}{dv}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\Omega_1 = a_1 \sin H_1 + a_2 \sin H_2 + \ldots. \tag{3}$$

Dans ces formules on a encore admis les notations:

$$G_n = 2\lambda_n v + 2B_n,$$
$$H_n = \sigma_n v + b_n,$$

et on a désigné par $A_0, A_1, \ldots$ des coefficients du premier ordre et d'un degré quelconque, tandis qu'on a supposé les coefficients $a_1, a_2, \ldots$ du second ordre et au moins du second degré. Les B et les b expriment des angles constants.

Il ne sera pas, cependant, nécessaire de considérer simultanément tous les termes de l'équation (1), vu que la plupart d'eux n'exercent

qu'une influence insensible, les uns sur les autres. Tous les termes de nature à ne pas s'agrandir n'offrant aucune difficulté à l'intégration, on peut les calculer séparément. Ce sont seulement les premiers termes du développement X_1 et celui que nous avons mis en tête du second membre de l'équation (1), ainsi que ceux dont les λ sont très petits, et en particulier les termes devenant élémentaires qui demandent à être considérés ensemble.

En ne considérant que les termes dont les λ décroissent, les A correspondants forment une série dont la convergence est extrêmement rapide. De même, en mettant de côté, dans la fonction Ω_1, les termes dont les σ n'acquièrent pas de valeurs diminuant de plus en plus, les a restants forment une série très convergente.

Donc, en ne retenant, dans les fonctions X_1 et Ω_1, que les termes exerçant une influence sensible sur les résultats d'intégration dus aux autres termes, ainsi que ceux qui deviendront, eux mêmes, très grands, les développements (2) et (3) seront très convergents.

Si les fonctions X_1 et Ω_1 étaient égales à zéro, on aurait immédiatement l'intégrale de l'équation (1). En désignant par Z_0 ce que devient T lorsque les dites conditions sont remplies, et en posant encore:

$$\alpha^2 = s_0 A_0,$$

la fonction Z_0 sera donnée au moyen de l'expression

$$G_0 + s_0 Z_0 = 2\,\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}(\lambda_0 v + B_0),$$

d'où il résulte:

$$s_0 Z_0 = \frac{4q}{1+q^2}\sin G_0 + \frac{1}{2}\frac{4q^2}{1+q^4}\sin 2G_0 + \dots.$$

On a supposé, toutefois, que la valeur de λ_0 soit différente de zéro, ce qui entraîne toujours une valeur du module inférieure à l'unité. En effet, le module étant déterminé par la condition

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)k = \frac{\alpha}{\lambda_0},$$

cette équation admet toujours, si le second membre a une valeur finie et positive, une racine positive inférieure à l'unité.

Cela étant, nous faisons:

$$T = Z_0 + \frac{2}{s_0} V_1.$$

En substituant cette expression dans l'équation (1), et en retranchant:

$$\frac{d^2 Z_0}{dv^2} = - A_0 \sin(G_0 + s_0 Z_0),$$

après avoir développé suivant les puissances de V_1 le terme mis en évidence dans l'équation mentionnée, nous aurons:

$$\frac{d^2 V_1}{dv^2} = - s_0 A_0 \cos 2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(\lambda_0 v + B_0) V_1 + s_0 A_0 \sin 2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(\lambda_0 v + B_0) V_1^2$$
$$+ \frac{2}{3} s_0 A_0 \cos 2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(\lambda_0 v + B_0) V_1^3 - \ldots - \frac{s_0}{2}(X_1 + \Omega_1),$$

ou bien, si nous remplaçons, moyennant la relation

$$\frac{2K}{\pi}(\lambda_0 v + B_0) = \xi,$$

la variable indépendante v par ξ:

$$\text{(4)} \quad \frac{d^2 V_1}{d\xi^2} + k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi V_1 - k^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi V_1^2 - \frac{2}{3} k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi V_1^3 + \ldots$$
$$\ldots = - X - \Omega,$$

où l'on a posé

$$X = \frac{s_0}{2\lambda_0^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 X_1; \qquad \Omega = \frac{s_0}{2\lambda_0^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \Omega_1.$$

En utilisant l'équation que nous venons d'obtenir, il faut évidemment exprimer les fonctions X et Ω au moyen de la variable ξ, ou bien, si l'on a reçu l'intégrale sous forme d'une quadrature, restituer la variable v sous le signe $\int$.

2. L'équation en V_1 à laquelle nous sommes parvenus, appartient au type de l'équation (10) du paragraphe précédent. On peut donc

y appliquer soit la transformation aboutissant en l'équation (12) du dit paragraphe, soit celle dont le résultat prend la forme de l'équation (14). Je préfère la première.

En faisant:

$$Y_1 = k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi = -(2k^2 \operatorname{sn} \xi^2 - k^2),$$

la forme générale des équations (11) sera:

$$\frac{d^2\varphi_{h.i}}{d\xi^2} - (2k^2 \operatorname{sn} \xi^2 - k^2)\varphi_{h.i} = W_{h.i},$$

où l'on a désigné par $W_{h.i}$ une fonction toute connue dont les diverses expressions sont données par les seconds membres des équations (11).

L'intégrale générale de l'équation que nous venons de mettre en évidence, s'exprimant au moyen de la formule

$$(5) \qquad \varphi_{h.i} = c_{h.i} \operatorname{dn} \xi + c'_{h.i} \operatorname{dn} \xi \left\{ \frac{\Theta_1'(\xi)}{\Theta_1(\xi)} + \frac{E}{K}\xi \right\} + \operatorname{dn} \xi \int \frac{d\xi}{\operatorname{dn} \xi^2} \int W_{h.i} \operatorname{dn} \xi d\xi,$$

nous allons considérer les divers cas correspondant à différentes valeurs des indices h et i.

D'abord, nous faisons:

$$W_{0.1} = k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi - \beta_{0.1},$$

d'où il résulte:

$$\int W_{0.1} \operatorname{dn} \xi d\xi = \int (k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi - \beta_{0.1}) \operatorname{dn} \xi d\xi.$$

Maintenant, pour éviter tout terme ayant la variable ξ pour multiplicateur, on doit annuler la constante $\beta_{0.1}$. Nous aurons de la sorte:

$$\int W_{0.1} \operatorname{dn} \xi d\xi = \frac{1}{2} k^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi$$

et ensuite:

$$\int \frac{d\xi}{\operatorname{dn} \xi^2} \int W_{0.1} \operatorname{dn} \xi d\xi = \frac{1}{\operatorname{dn} \xi},$$

de façon que notre résultat sera:

$$\varphi_{0.1} = c_{0.1} \operatorname{dn} \xi + 1.$$

Pour faire disparaitre, dans l'expression de $\varphi_{0.1}$, le terme constant, il faut remplacer la constante surabondante $c_{0.1}$ par $-\frac{2K}{\pi}$; il en résulte:

$$\varphi_{0.1} = 1 - \frac{2K}{\pi}\operatorname{dn}\xi. \tag{6, a}$$

Avec cette expression, il sera facile de former l'expression

$$W_{1.0} = 2k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)\operatorname{sn}\xi\operatorname{cn}\xi + \beta_{1.0},$$

d'où nous tirons, après avoir égalé la constante $\beta_{1.0}$ à zéro, le résultat que voici:

$$\int W_{1.0}\operatorname{dn}\xi d\xi = -\left(\frac{2K}{\pi}\right)\operatorname{dn}\xi^2.$$

Après avoir opéré la seconde intégration, nous aurons:

$$\operatorname{dn}\xi\int\frac{d\xi}{\operatorname{dn}\xi^2}\int W_{1.0}\operatorname{dn}\xi d\xi = -\left(\frac{2K}{\pi}\right)\xi\operatorname{dn}\xi,$$

résultat qui parait, au premier coup d'oeil, en contradiction avec nos suppositions, puisque le facteur ξ est sorti hors des signes trigonométriques. Cependant, si l'on fait:

$$c_{1.0} = 0; \qquad c'_{1.0} = \frac{2K}{\pi}\frac{K}{E},$$

les termes semiséculaires se détruisent, et nous retiendrons

$$\varphi_{1.0} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)\frac{K}{E}\frac{\Theta_1'(\xi)}{\Theta_1(\xi)}\operatorname{dn}\xi. \tag{6, b}$$

Pour déterminer la fonction $\varphi_{0.2}$, rappelons-nous qu'on a:

$$Y_2 = -k^2\sin 2\operatorname{am}\xi.$$

Il résulte de là qu'on doit adopter la valeur zéro de la constante $\beta_{0.2}$, ainsi que l'expression

$$W_{0.2} = 2k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\operatorname{dn}\xi^2\operatorname{sn}\xi\operatorname{cn}\xi.$$

En introduisant cette valeur dans l'équation (5), on aura tout de suite:

$$\varphi_{0.2} = c_{0.2} \operatorname{dn} \xi + c'_{0.2} \operatorname{dn} \xi \left\{ \frac{\theta'_1(\xi)}{\theta_1(\xi)} + \frac{E}{K} \xi \right\}$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \operatorname{dn} \xi \int \operatorname{dn} \xi^2 d\xi.$$

Mais, puisqu'on a:

$$\operatorname{dn} \xi^2 = \frac{d^2 \log \theta(\xi)}{d\xi^2} + \frac{E}{K},$$

il viendra, si nous faisons:

$$c_{0.2} = 0; \qquad c'_{0.2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2,$$

la formule que voici:

$$(6, c) \qquad \varphi_{0.2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \operatorname{dn} \xi \frac{d \log \frac{\theta_1(\xi)}{\theta(\xi)}}{d\xi} = - \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \operatorname{sn} \xi \operatorname{cn} \xi.$$

Cherchons maintenant la fonction $\varphi_{1.1}$.

En vertu des expressions que nous venons de signaler, nous obtenons facilement celles-ci:

$$- 2 Y_2(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1 0} = 2k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{K}{E} \operatorname{dn} \xi^2 \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} \sin 2 \operatorname{am} \xi;$$

$$- 4 \frac{d\varphi_{0.2}}{d\xi} = 2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \{2 \operatorname{dn} \xi^3 - (1 + k'^2) \operatorname{dn} \xi\},$$

dont la somme, à laquelle il faut ajouter la constante $\beta_{1.1}$, donne la fonction $W_{1.1}$.

Examinons d'abord l'intégrale

$$A = - 4 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{K}{E} \int \operatorname{dn} \xi^3 \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} d(\operatorname{dn} \xi).$$

On obtient immédiatement

$$A = - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{K}{E} \operatorname{dn} \xi^4 \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{K}{E} \int \operatorname{dn} \xi^4 \frac{d^2 \log \theta_1(\xi)}{d\xi^2} d\xi,$$

d'où l'on tire, en considérant la formule

$$\frac{k'^2}{\mathrm{dn}\,\xi^2} = \frac{E}{K} + \frac{d^2 \log \Theta_1(\xi)}{d\xi^2},$$

le résultat:

$$A = -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{K}{E} \mathrm{dn}\,\xi^4 \frac{d \log \Theta_1(\xi)}{d\xi} + k'^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{K}{E} \int \mathrm{dn}\,\xi^2 d\xi - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \int \mathrm{dn}\,\xi^4 d\xi.$$

En ajoutant à cette expression la suivante

$$B = -2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \int \{(1 + k'^2)\,\mathrm{dn}\,\xi^2 - 2\,\mathrm{dn}\,\xi^4\} d\xi,$$

nous aurons:

$$\int W_{1.1}\,\mathrm{dn}\,\xi d\xi = A + B + \beta_{1.1} \int \mathrm{dn}\,\xi d\xi.$$

Cela étant, nous désignerons par $U_0^{(2)}$ et $U_0^{(4)}$ les termes constants dans les développements de $\mathrm{dn}\,\xi^2$ et de $\mathrm{dn}\,\xi^4$, de sorte qu'on a:

$$U_0^{(2)} = \frac{E}{K},$$

$$U_0^{(4)} = \frac{2}{3}(1 + k'^2)\frac{E}{K} - \frac{1}{3}k'^2;$$

or, la partie constante de $\mathrm{dn}\,\xi$ étant égale à $\frac{\pi}{2K}$, il faut que la valeur de la constante $\beta_{1.1}$ satisfasse à l'équation de condition

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \left\{\left(k'^2 \frac{K}{E} - 2(1 + k'^2)\right) U_0^{(2)} + 3 U_0^{(4)}\right\} + \frac{\pi}{2K}\beta_{1.1} = 0;$$

autrement la fonction $\varphi_{1.1}$ contiendrait des termes séculaires.

En introduisant, dans l'équation que nous venons de trouver, les valeurs indiquées de $U_0^{(2)}$ et $U_0^{(4)}$, on obtiendra:

$$\beta_{1.1} = 0.$$

Ayant ainsi fixé la valeur de la constante $\beta_{1.1}$, on aura sans peine la fonction $\varphi_{1.1}$ sous forme d'une série ne contenant que des termes en cosinus, vu qu'on peut toujours, par une détermination convenable de la

constante surabondante $c_{1.1}$, faire disparaître, dans le résultat, le terme constant.

La détermination de la fonction $\varphi_{2.0}$ s'opère tout-à-fait en procédant comme nous l'avons indiqué dans ce qui précède. Il suffit de remarquer qu'on peut égaler la constante $\beta_{2.0}$ à zéro. La raison en est que la fonction $W_{2.0}$ ne contient que des termes en sinus. Telle est aussi l'expression de $\varphi_{2.0}$: car, après avoir choisi la constante $c'_{2.0}$ de manière à faire disparaître les termes semiséculaires, la dite fonction sera représentée par une série ne renfermant que des termes en sinus.

On pourrait aussi se servir de la formule générale

$$\int \mathrm{dn}\,\xi^{2n+2} d\xi = \frac{2n}{2n+1}(1 + k'^2)\int \mathrm{dn}\,\xi^{2n} d\xi - \frac{2n-1}{2n+1} k'^2 \int \mathrm{dn}\,\xi^{2n-2} d\xi$$
$$- \frac{1}{2n(2n+1)} \frac{d(\mathrm{dn}\,\xi^{2n})}{d\xi},$$

qui sert à développer les diverses intégrales de proche en proche.

Il nous reste à chercher les fonctions qui multiplient les termes du troisième degré.

D'abord, puisque nous avons:

$$Y_3 = -\frac{2}{3} k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi,$$

il est aisé de trouver l'expression suivante

$$W_{0.3} = -\frac{1}{2} k^4 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (\sin 2\,\mathrm{am}\,\xi)^2 \,\mathrm{dn}\,\xi + \frac{2}{3} k^4 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi^3 + \beta_{0.3}$$
$$= -2k^4 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \mathrm{sn}\,\xi^2\,\mathrm{cn}\,\xi^2\,\mathrm{dn}\,\xi + \frac{2}{3} k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1 - 2\,\mathrm{sn}\,\xi^2)\,\mathrm{dn}\,\xi^3 + \beta_{0.3},$$

ce qui entraîne:

$$W'_{0.3}\,\mathrm{dn}\,\xi = 2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \left\{\frac{5}{3}\mathrm{dn}\,\xi^6 - \frac{4}{3}(1 + k'^2)\,\mathrm{dn}\,\xi^4 + k'^2\,\mathrm{dn}\,\xi^2\right\} + \beta_{0.3}\,\mathrm{dn}\,\xi.$$

Avant tout, je vais montrer que la partie constante de cette expression s'annule de soi-même, de sorte qu'on aura:

$$\beta_{0.3} = 0.$$

A cette fin, remarquons la formule

$$U_0^{(6)} = \left[\frac{8}{15}(1 + k'^2)^2 - \frac{3}{5}k'^2\right]\frac{E}{K} - \frac{4}{15}k'^2(1 + k'^2),$$

$U_0^{(6)}$ étant le terme constant dans le développement de $\mathrm{dn}\,\xi^6$. En introduisant, avec les valeurs de $U_0^{(2)}$ et $U_0^{(4)}$ données plus haut, l'expression que nous venons de signaler, nous aurons:

$$\frac{5}{3}U_0^{(6)} - \frac{4}{3}(1 + k'^2)U_0^{(4)} + k'^2 U_0^{(2)} = 0.$$

Donc, la partie constante du développement de la fonction $W_{0.3}$ se détruit.

En conséquence du résultat que nous venons de trouver, il faut qu'on égale à zéro, la constante $\beta_{0.3}$.

Du fait que la fonction $W_{1.2}$ ne contient que des termes en sinus, il s'ensuit que la constante $\beta_{1.2}$ aura aussi la valeur zéro. On en conclut encore que toute la fonction $\varphi_{1.2}$ s'obtient sous forme d'une série ne contenant que des termes en sinus.

Quant à la constante $\beta_{2.1}$, le calcul en serait très compliqué s'il s'agissait d'en mettre en évidence l'expression algébrique. Mais puisqu'il n'importe que très peu si la constante dont il s'agit est très petite ou exactement égale à zéro, nous nous restreindrons à ne considérer que la forme de la fonction $\varphi_{2.1}$.

En inspectant l'équation (11, h) du paragraphe précédent, et en se rappelant la forme des fonctions Y_2, Y_3, $\varphi_{0.1}$, $\varphi_{2.0}$, $\varphi_{0.3}$ et $\varphi_{1.2}$, il sera aisé de voir que le produit $W_{2.1}\,\mathrm{dn}\,\xi$ est représenté au moyen d'une série en cosinus. En déterminant la constante $\beta_{2.1}$ d'une manière convenable, le terme constant disparaîtra, de sorte qu'il résultera, pour représenter la fonction $\varphi_{2.1}$, un développement ne contenant que des termes en cosinus puisque le terme constant peut être détruit au moyen de la constante surabondante $c_{2.1}$.

Finalement, en abordant la détermination de la fonction $\varphi_{3.0}$, on comprendra tout de suite que la constante $\beta_{3.0}$ est nulle, et que la dite fonction s'obtient sous forme d'une série en sinus sans terme séculaire.

3. Ayant déterminé les fonctions $\varphi_{0.1}$, $\varphi_{1.0}$, ... de la manière que nous venons d'indiquer précédemment, et après avoir introduit dans l'équation (4) l'expression

$$V_1 = (1 - \varphi_{0.1})\Psi_1 + \varphi_{1.0}\frac{d\Psi_1}{d\xi} + \varphi_{0.2}\Psi_1^2 + \ldots,$$

nous obtenons:

$$\frac{d^2\Psi_1}{d\xi^2} = -X - \Omega - \Sigma$$

ou bien:

$$\frac{d^2\Psi_1}{dv^2} = -\frac{s_0}{2}(X_1 + \Omega_1 + \Sigma_1),$$

le symbole

$$\Sigma = \frac{s_0}{2\lambda_0^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\Sigma_1$$

signifiant une suite de termes très petits, du deuxième ordre, qu'on reconnaîtra facilement en considérant l'équation (12) du paragraphe précédent.

Maintenant, si nous ne retenons qu'un seul terme de X, et que nous posions:

$$X_2 = A_2\sin(G_2 + s_2T) + A_3\sin(G_3 + s_3T) + \ldots + A_0'\sin(G_0 + s_0T)\frac{dT}{dv},$$

nous aurons:

$$\frac{d^2\Psi_1}{dv^2} = -\frac{s_0}{2}A_1\sin(G_1 + s_1T) - \frac{s_0}{2}(X_2 + \Omega_1 + \Sigma_1).$$

Mais, puisqu'on a:

$$T = Z_0 + \frac{2}{s_0}(1 - \varphi_{0.1})\Psi_1 + \frac{2}{s_0}\frac{1}{\lambda_0}\frac{\pi}{2K}\varphi_{1.0}\frac{d\Psi_1}{dv} + \ldots,$$

l'argument du terme que nous avons mis en évidence s'écrit de la manière suivante:

$$2\lambda_1 v + 2B_1 + 2\frac{s_1}{s_0}(1 - \varphi_{0.1})\Psi_1 + s_1 Z_0 + \frac{2}{\lambda_0}\frac{s_1}{s_0}\frac{\pi}{2K}\varphi_{1.0}\frac{d\Psi_1}{dv} + \ldots.$$

En développant, suivant les puissances de

$$-2\frac{s_1}{s_0}\varphi_{0.1}\Psi_1 + s_1 Z_0 + \ldots,$$

le sinus de cet argument, après l'avoir mis sous la forme d'une série tri-

gonométrique, le résultat sera toujours convergent, et on pourrait même démontrer que le terme constant ne surpasse pas l'unité. Pour plus de détails, il suffit de renvoyer le lecteur à mon mémoire »Untersuchungen etc.» p. 241.

En supposant que la fonction Ψ_1 soit une quantité tout au plus de l'ordre de $\frac{1}{s_1}$, le produit $2\frac{s_1}{s_0}\varphi_{0.1}\Psi_1$ peut toujours être considéré comme une quantité très petite du premier ordre, vu que la fonction $\varphi_{0.1}$ s'évanouit avec k^2, c'est-à-dire avec les forces troublantes. Il en est de même du produit $\frac{2}{\lambda_0}\frac{s_1}{s_0}\frac{\pi}{2K}\varphi_{1.0}\frac{d\Psi_1}{dv}$; pourtant, si λ_1 est très petit relativement à λ_0, ce produit est notablement moindre que le terme dépendant de φ_{01}. Dans le cas d'une orbite intermédiaire, le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ est toujours peu considérable, d'où l'on pourrait tirer l'autorisation à omettre, dans la première approximation, le terme dépendant de $\frac{d\Psi_1}{dv}$. Cependant, la simplification due à ce fait n'étant pas essentielle, je n'en ferai pas usage. En revanche, j'introduirai pour abréger l'écriture, les notations

$$2\frac{s_1}{s_0}\varphi_{0.1} = \psi_{0.1},$$

$$\frac{2}{\lambda_0}\frac{s_1}{s_0}\frac{\pi}{2K}\varphi_{1.0} = \psi_{1.0},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

de sorte que nous aurons:

$$T = Z_0 + \frac{2}{s_0}\Psi_1 - \frac{1}{s_1}\psi_{0.1}\Psi_1 + \frac{1}{s_1}\psi_{1.0}\frac{d\Psi_1}{dv} + \frac{1}{s_1}\psi_{0.2}\Psi_1^2 + \ldots.$$

Cela posé, l'équation en Ψ_1 prend la forme suivante:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Psi_1}{dv^2} = &-\frac{s_0}{2}A_1\sin\left(G_1 + 2\frac{s_1}{s_0}\Psi_1\right) - \frac{s_0}{2}A_1\cos\left(G_1 + 2\frac{s_1}{s_0}\Psi_1\right)\{s_1 Z_0 - \psi_{0.1}\Psi_1 + \ldots\} \\ &+ \frac{1}{1.2}\frac{s_0}{2}A_1\sin\left(G_1 + 2\frac{s_1}{s_0}\Psi_1\right)\{s_1 Z_0 - \psi_{0.1}\Psi_1 + \ldots\}^2 + \ldots \\ &- \frac{s_0}{2}(X_2 + \Omega_1 + \Sigma_1).\end{aligned}$$

En examinant les divers termes du développement signalé, on s'aperçoit facilement qu'on en peut retrancher une partie telle que les termes restants deviendront indépendants de l'argument G_0. Pour mettre en évidence la partie dont il est question, posons:

$$\Psi_1 = \frac{s_0}{2}(T_1 + \Phi_1),$$

et admettons en outre la notation

$$P_0 = 1 - \frac{h_2}{1.2} + \frac{h_4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

les h étant les parties constantes des puissances paires du produit $s_1 Z_0$. Enfin, nous désignons par $l_{0.1}, l_{1\,0}\ldots$ les termes constants dans les développements de $\psi_{0.1}^2, \psi_{1.0}^2, \ldots$.

Maintenant, si nous établissons l'équation

$$(7)\quad \frac{d^2T_1}{dv^2} = -A_1 P_0 \sin(G_1 + s_1 T_1) + \frac{s_0^2}{1.2.4} l_{0.1} A_1 \sin(G_1 + s_1 T_1) T_1^2 + \ldots$$
$$+ A_0' \sin(G_0 + s_0 Z)\frac{dZ_0}{dv} + \ldots - (X_2 + \Omega_1) + [T_1, \Phi_1],$$

l'équation d'où s'obtient la fonction Φ_1 sera celle-ci:

$$(8)\quad \frac{d^2\Phi_1}{dv^2} + \{s_1 A_1 \cos(G_1 + s_1 T_1) - s_1 A_1 \sin(G_1 + s_1 T_1)[s_1 Z_0 - \ldots] - \ldots\}\Phi_1$$
$$= -A_0' \sin(G_0 + s_0 Z_0)\frac{dZ_0}{dv} - A_1 \cos(G_1 + s_1 T_1)\left(s_1 Z_0 - \frac{s_0}{2}\psi_{0.1} T_1 + \ldots\right)$$
$$- \ldots - \Sigma_1 - [T_1, \Phi_1].$$

La raison d'introduire le symbole [], se comprend facilement. Il nous sert, tout comme dans le paragraphe 1 du premier chapitre, à transférer certains termes d'une équation à une autre. Nous pouvons de la sorte admettre que les termes acquérant, par l'intégration, des diviseurs moindres que λ_0, c'est à dire les diviseurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, soient rejoints à l'équation (7), tandis que ceux qui ne deviennent pas très agrandis se trouvent réunis dans l'équation (8). Ainsi, la fonction T_1 ne dépendra plus de l'argument G_0 ou d'arguments de la forme $iG_0 \pm i'G_n$, i et i'

étant des entiers tels que la différence $i\lambda_0 \pm i'\lambda_n$ ne soit pas très petite, c'est à dire comparable à λ_1.

Mais, puisqu'il y a toujours certaines valeurs des nombres i et i' qui rendent la différence $i\lambda_0 - i'\lambda_n$ aussi petite qu'on voudra, il sera indispensable, pour délivrer la fonction Φ_1 de termes assujettis à devenir trop grands, de les transférer à l'équation (7). Au reste, ces termes dépendant d'arguments qui sont déjà représentés dans l'équation (7), on pourra les réunir avec les termes correspondants de cette équation.

Quant au premier terme du second membre de l'équation (8), on peut aussi le considérer d'une manière très simple. En effet, ce terme ne dépendant que de l'argument G_0, on en tient compte par une légère modification des coefficients du développement de la fonction Z_0. A cet égard, il me faut renvoyer le lecteur aux formules que j'ai données dans les »Untersuchungen etc.», p. 237, et dont j'ai fait, dans le mémoire présent, un fréquent usage.

Cela établi, il est évident que la fonction Φ_1 est une quantité du deuxième ordre, et que ses divers termes sont multipliés par quelqu'un des facteurs $A_1, A_2, \ldots$; son développement, convergent en même temps que celui de T_1, s'obtiendra sans difficulté essentielle. Il ne nous reste donc qu'à chercher le développement de la fonction T_1.

4. Concevons en particulier le cas d'une orbite intermédiaire, où le nombre des arguments est restreint à deux seulement. On comprend aisément que la fonction T_1 reste toujours très petite, tout au plus de l'ordre de $\frac{1}{s_1}$, et que la fonction Ω_1 n'existe plus. Il est donc évident que les termes de l'équation (7) qui dépendent de $T_1^2, \left(\frac{dT_1}{dv}\right)^2, \ldots$ sont très petits par rapport au premier terme du second membre, et qu'on peut les considérer au moyen d'approximations successives. En négligeant, d'abord, ces termes, ou plutôt, en les réunissant avec la partie X_2, on retient l'équation

$$\frac{d^2T_1}{dv^2} = -A_1P_0\sin(G_1 + s_1T_1) - X_2 + [T_1, \Phi_1]. \tag{9}$$

Mais la forme de cette équation est précisément celle de l'équation (1), à l'exception de ce que la partie $[T_1, \Phi_1]$ figure à la place de Ω_1; on peut

donc réitérer les opérations qui nous ont conduit aux équations (7) et (8), procédé duquel découleront de nouvelles équations du même type que celui des équations citées. On aura ainsi le système de résultats que voici:

$$
(10) \quad \begin{cases} T = Z_0 + T_1 + \Phi_1 + \frac{1}{s_1}\left\{ - \psi_{0.1}\Psi_1 + \psi_{1.0}\frac{d\Psi_1}{dv} + \psi_{0.2}\Psi_1^2 + \dots \right\}, \\ T_1 = Z_1 + T_2 + \Phi_2 + \frac{1}{s_2}\left\{ - \psi_{0.1}^{(1)}\Psi_2 + \psi_{1.0}^{(1)}\frac{d\Psi_2}{dv} + \psi_{0.2}^{(1)}\Psi_2^2 + \dots \right\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}
$$

d'où l'on tire, en ajoutant les diverses équations:

$$
\begin{aligned} (11) \quad T = & Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots \\ & + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots \\ & + \frac{1}{s_1}\left\{ - \psi_{0\,1}\Psi_1 + \psi_{1.0}\frac{d\Psi_1}{dv} + \dots \right\} + \frac{1}{s_2}\left\{ - \psi_{0.1}^{(1)}\Psi_2 + \psi_{1.0}^{(1)}\frac{d\Psi_2}{dv} + \dots \right\} \dots \end{aligned}
$$

En vertu des résultats que j'obtins relativement aux nombres $s_0, s_1, \dots$ lorsque, dans mon mémoire de 1887, j'établis la série dont il s'agit, il se comprend immédiatement que le développement de la première ligne de l'équation précédente est convergent.

Quant à la série

$$
\Phi_1 + \Phi_2 + \dots,
$$

qui n'a pas été mise en évidence, dans mon mémoire cité, je remarque qu'on a:

$$
\Phi_1 \mathrel{\underline{\circ}} \frac{s_1 A_1 f_1}{s_0 \lambda_0^2},
$$

$$
\Phi_2 \mathrel{\underline{\circ}} \frac{s_2 A_2 f_2}{s_1 \lambda_1^2},
$$

$$
\dots\dots\dots,
$$

les coefficients f étant des quantités tout au plus de l'ordre zéro, mais le plus souvent très petites. Mais, puisqu'on a, dans le cas intermédiaire,

$$\lambda_0 \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \frac{1}{s_1},$$

$$\lambda_1 \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \frac{1}{s_2},$$

$$\cdots\cdots$$

(voir l'introduction du mémoire que je viens de citer), il s'ensuit que la série dont il s'agit jouit au moins de la même convergence que celle-ci:

$$\frac{s_1^3 A_1}{s_0} + \frac{s_2^3 A_2}{s_1} + \frac{s_3^3 A_3}{s_2} + \ldots.$$

En considérant maintenant que la forme générale des coefficients A_n est:

$$A_n = M_n \varepsilon^{sn},$$

M_n étant un coefficient du premier ordre, et ε une quantité moindre que l'unité, il sera clair que la convergence de la série que nous venons de mettre en évidence est celle d'une progression géométrique.

Finalement, en considérant qu'on a:

$$\psi_1' \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \frac{s_0}{s_1} f_1,$$

$$\psi_2' \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \frac{s_1}{s_2} f_2,$$

$$\cdots\cdots,$$

on se convaincra facilement que le développement donné sur la troisième ligne de l'équation (11) est convergent. Car, si les sommes des développements entre les parenthèses ne forment pas, en elles-mêmes, une série convergente, ce qui cependant ne peut arriver que sous conditions spéciales, les dites sommes appartiennent du moins au même ordre de grandeur: la convergence dont il s'agit est donc nécessitée par les facteurs $\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \ldots.$ Pour mieux élucider les diverses circonstances qu'on doit considérer, en faisant la conclusion indiquée sur la convergence, voici quelques remarques.

En regardant plusieurs termes critiques qui, considérés isolément font prendre aux modules des valeurs peu différentes de l'unité, ces va-

leurs deviendraient sensiblement amoindries si on les évaluait simultanément, c'est a dire en considérant l'influence mutuelle qu'exercent les divers termes, les uns sur les autres. Cela est visible par la présence des facteurs P_0.

La convergence des développements

$$-\psi_{0.1}\Psi_1 + \psi_{1.0}\frac{d\Psi_1}{dv} + \ldots, \text{ etc.}$$

étant difficile à démontrer généralement, on peut s'en dispenser, vu qu'il n'est pas nécessaire d'introduire un nombre illimité de fonctions ψ. Il suffit, en effet, de faire disparaître les premières puissances des fonctions $V_1, V_2, \ldots$ ainsi que leurs premières dérivées: les termes non éliminés (dont la convergence s'ensuit immédiatement), ainsi que les termes, à nombre limité, dépendant des fonctions $B_{0.0}, B_{0.1}, \ldots$ etc. [voir: l'équation (12) du paragraphe précédent] se réunissent aux fonctions $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$.

On se rappelle que l'équation (7) contient des termes dépendant de l'argument G_1 qui ont été négligés dans l'équation (9), à savoir: les termes provenant des produits $T_1^2 \sin(G_1 + s_1 T_1)$, etc.; il sera facile de réunir à la fonction Z_1, la partie de T_1, due à ces termes. En effet, si nous considérons une équation du type de l'équation (4), après y avoir négligé les termes dépendant de V_2^2, de V_2^3, etc., et que nous omettions la partie élémentaire, nous aurons:

$$\frac{d^2V_2}{d\xi_1^2} + k_1^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi_1 . V_2 = \frac{s_1}{2\lambda_1^2}\left(\frac{\pi}{2K_1}\right)^2 X_2.$$

Or, si nous admettons, pour revenir au cas envisagé,

$$X_2 = \frac{s_0}{1.2.4} l_{0.1} A_1 T_1^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi_1,$$

ce qui est le terme le plus essentiel dont il s'agit, nous aurons:

$$\frac{d^2V_2}{d\xi_1^2} + k_1^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi_1 . V_2 = \frac{s_0 l_{0.1}}{2.4} k_1^2 T_1^2 \operatorname{sn} \xi_1 \operatorname{cn} \xi_1.$$

On tire de là, en utilisant une formule bien connue,

$$V_2 = c_1 \operatorname{dn} \xi_1 + c_2 \operatorname{dn} \xi_1 \left\{ \frac{\Theta_1'(\xi_1)}{\Theta_1(\xi_1)} + \frac{E_1}{K_1}\xi_1 \right\}$$
$$+ \frac{s_0 l_{0.1}}{2.4} k_1^2 \operatorname{dn} \xi_1 \int \frac{d\xi_1}{\operatorname{dn} \xi_1^2} \int T_1^2 \operatorname{sn} \xi_1 \operatorname{cn} \xi_1 \operatorname{dn} \xi_1 d\xi_1.$$

Par cette formule, il est aisé de voir que la partie de V_2 que nous venons de considérer, est une quantité tout au plus du même ordre que le produit

$$\frac{l_{0.1}k_1^2}{s_1^2}:$$

elle est, dans les cas qui se présentent à l'ordinaire, une quantité du cinquième ordre par rapport aux forces perturbatrices. Quoi qu'il en soit, la partie considérée est assez petite relativement à la fonction Z_1; et puisque les termes semiséculaires qu'on a introduits par la double intégration, se détruisent, en déterminant d'une manière convenable la constante c_2, la fonction V_2 ne contiendra d'autres termes dépendant de l'argument G_1 que ceux qui se réunissent à la fonction Z_1 sans la modifier sensiblement.

Par des considérations analogues, on se convaincra que ce que je viens de dire relativement à la manière de tenir compte du terme de la forme

$$A_0' \sin(G_0 + s_0 Z_0)\frac{dZ_0}{dv},$$

est légitime, et que le même raisonnement s'applique aussi aux autres termes de la même forme.

Ayant ainsi examiné les différentes parties du développement (11) de la fonction T, et les ayant trouvées convergentes et dépourvues de tout terme renfermant la variable hors des signes trigonométriques, on conclut que le développement dont il s'agit reste en vigueur pour toute valeur de la variable indépendante.

5. Si, contrairement aux suppositions précédentes, la fonction qui figure dans le second membre de l'égalité (4), renfermait des termes donnant lieu, par l'intégration, à des termes élémentaires, la manière d'opérer que nous avons poursuivie précédemment cesserait d'être applicable. La raison en est qu'un terme dont l'argument a la forme simple

$$H = \sigma v + b$$

peut devenir, dans le procédé d'intégration que nous avons envisagé, tellement agrandi que les termes dépendant de V_1^2 et de V_1^3 dans l'équation (4) ne seraient pas négligeables par rapport au terme qui se trouve mul-

tiplié par la première puissance de V_1. Il nous faut donc, pour arriver à un résultat effectif, opérer l'intégration de l'équation dont il s'agit d'une autre façon.

A cette fin, reprenons l'équation (4), et commençons par y faire entrer quelques modifications, du reste peu sensibles.

D'abord, nous en retranchons le terme dépendant de la partie constante de V_1^2, terme qui se réunit immédiatement avec la fonction Z_0.

Or, par cette opération, on ne parvient plus à déterminer le module conformément à l'équation signalée dans le n° 1, mais bien à employer, à ce but, la relation

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 = \frac{8_0 A_0}{\lambda_0^2}\left(1 - \frac{4h_2}{1.2} + \frac{16h_4}{1.2.3.4} - \ldots\right),$$

$h_2, h_4, \ldots$ étant les parties constantes des fonctions $V_1^2, V_1^4, \ldots$. En ne considérant que la première puissance de la constante h_2, l'équation (4) prendra la forme suivante:

$$(12) \qquad \frac{d^2 V_1}{d\xi^2} + (1 + 2h_2)k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi.V_1 - k^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi(V_1^2 - h_2)$$

$$-\frac{2}{3}k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi.V_1^3 = -\frac{8_0}{2\lambda_0^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2(X_1 + \Omega_1)$$

$$= -(X + \Omega).$$

Maintenant, pour rendre l'étude de l'équation (12) plus aisée qu'elle ne l'est en conservant la forme primitive, introduisons, au lieu de V_1 une nouvelle fonction z, de manière que la partie essentielle du terme dépendant de sa première puissance disparaisse dans l'équation transformée. On y parvient en admettant

$$V_1 = \frac{2K}{\pi}\,\mathrm{dn}\,\xi.z.$$

Puis, pour éviter le terme dépendant de la première dérivée de z, ou du moins, pour en faire disparaître la portion la plus considérable,

introduisons une nouvelle variable indépendante ω dont la relation à la variable ξ sera donnée par la formule

$$d\xi = \frac{K}{E} \operatorname{dn} \omega^2 d\omega,$$

E étant l'intégrale elliptique complète de seconde espèce.

Certes, on aurait pu faire disparaître aussi le terme dont j'ai parlé tout-à-l'heure, en utilisant la méthode du n° 3 du paragraphe précédent; mais je préfère, dans le cas actuel, l'emploi du moyen que je viens d'indiquer.

Cela étant, on déduit immédiatement les formules que voici:

$$\frac{dV_1}{d\xi} = \frac{2K}{\pi}\left\{\frac{E}{K}\frac{\operatorname{dn}\xi}{\operatorname{dn}\omega^2}\frac{dz}{d\omega} - k^2 \operatorname{sn}\xi \operatorname{cn}\xi . z\right\},$$

$$\frac{d^2V_1}{d\xi^2} = \frac{2K}{\pi}\left\{\left(\frac{E}{K}\right)^2 \frac{\operatorname{dn}\xi}{\operatorname{dn}\omega^4}\frac{d^2z}{d\omega^2} + 2\left(\frac{E}{K}\right)^2\left[\frac{k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\xi}{\operatorname{dn}\omega^5} - \frac{K}{E}\frac{k^2 \operatorname{sn}\xi \operatorname{cn}\xi}{\operatorname{dn}\omega^2}\right]\frac{dz}{d\omega}\right.$$
$$\left. - k^2 \cos 2 \operatorname{am}\xi \operatorname{dn}\xi . z\right\},$$

en vertu desquelles l'équation (12) se transforme en celle-ci:

$$(13) \qquad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{d^2z}{d\omega^2} + \left\{\left(\frac{2K}{\pi}\right)\frac{k^2 \sin 2 \operatorname{am}\omega}{\operatorname{dn}\omega} - \left(\frac{2K}{\pi}\right)\left(\frac{K}{E}\right)\frac{k^2 \sin 2 \operatorname{am}\xi}{\operatorname{dn}\xi}\operatorname{dn}\omega^2\right\}\frac{2K}{\pi}\frac{dz}{d\omega}$$
$$+ 2h_2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\left(\frac{K}{E}\right)^2 k^2 \cos 2 \operatorname{am}\xi \operatorname{dn}\omega^4 z$$
$$- \frac{2K}{\pi}\left(\frac{K}{E}\right)^2 \frac{k^2 \sin 2 \operatorname{am}\xi}{\operatorname{dn}\xi}\operatorname{dn}\omega^4\left\{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \operatorname{dn}\xi^2 z^2 - h_2\right\}$$
$$- \frac{2}{3}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4\left(\frac{K}{E}\right)^2 k^2 \cos 2 \operatorname{am}\xi \operatorname{dn}\xi^2 \operatorname{dn}\omega^4 z^3$$
$$= -\frac{\pi}{2K}\left(\frac{K}{E}\right)^2 \frac{\operatorname{dn}\omega^4}{\operatorname{dn}\xi}(X + \Omega).[1]$$

---

[1] On a écrit, dans cette équation, $\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 (X + \Omega)$ au lieu de $(X + \Omega)$.

Mais il faut qu'on remplace partout, dans cette équation, la variable ξ par son expression en ω. A cette fin, rappelons-nous la relation

$$\operatorname{dn}\omega^2 = \frac{E}{K} + \frac{d^2 \log \theta(\omega)}{d\omega^2},$$

ce qui donne:

$$\xi = \omega + \frac{K}{E}\frac{d \log \theta(\omega)}{d\omega},$$

ou bien:

$$\xi - \omega = \frac{\pi}{2E}\left\{\frac{4q}{1-q^2}\sin\frac{\pi}{K}\omega + \frac{4q^2}{1-q^4}\sin 2\frac{\pi}{K}\omega + \ldots\right\}.$$

Puis, en mettant:

$$\xi = \frac{2K}{\pi}x; \qquad \omega = \frac{2K}{\pi}u,$$

et en considérant les développements

$$\frac{\pi}{2K} = 1 - 4q + 12q^2 - 32q^3 + 76q^4 - \ldots,$$

$$\frac{\pi}{2E} = 1 + 4q - 4q^2 - 32q^3 + 44q^4 + \ldots,$$

d'où il s'ensuit:

$$\frac{\pi}{2K}\frac{\pi}{2E} = 1 - 8q^2 + 72q^4 - \ldots,$$ [1]

---

[1] Le développement que nous venons de donner dans le texte, s'obtient directement de la manière suivante.

En observant qu'on a:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \operatorname{dn}\xi^2 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{E}{K} + \frac{8q}{1-q^2}\cos 2x + \frac{16q^2}{1-q^4}\cos 4x + \ldots,$$

et d'autre part:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \operatorname{dn}\xi^2 = \left(1 - \frac{1}{2}k^2\right)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2\operatorname{am}\xi,$$

nous allons introduire, dans la seconde de ces expressions, le développement

$$k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2\operatorname{am}\xi = -32q^2(1 + 2q^2 + 4q^4 + \ldots) + \frac{16q}{1-q^2}\cos 2x + \frac{32q^2}{1-q^4}\cos 4x + \ldots.$$

on obtient:

$$e^{2in(x-u)} = 1 - 16n^2q^2$$
$$+ 8inq[1 - (7 + 8n^2)q^2] \sin 2u$$
$$- 32n^2q^3 \cos 2u$$
$$+ 8inq^2 \sin 4u + 16n^2q^2 \cos 4u + \ldots,$$

n étant un entier quelconque.

De cette expression générale, on déduit les formules suivantes:

$$\cos 2x = -4q + 44q^3 + (1 - 12q^2)\cos 2u + 4q\cos 4u + \ldots,$$
$$\sin 2x = (1 - 20q^2)\sin 2u + 4q\sin 4u + \ldots,$$
$$\cos 4x = 24q^2 - 8q\cos 2u + \cos 4u + \ldots,$$
$$\sin 4x = -8q\sin 2u + \sin 4u + \ldots,$$

qui nous serviront à exprimer tous les coefficients de l'équation (13) au moyen de l'argument u.

Par la théorie des fonctions elliptiques on parvient facilement aux développements que voici:

$$\frac{2K}{\pi}\frac{k^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi}{\mathrm{dn}\,\xi} = \frac{16q}{1-q^2}\sin 2x + \ldots,$$
$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi = \frac{16q}{1-q^2}\sin 2x + \frac{64q^2}{1-q^4}\sin 4x + \ldots,$$

Nous aurons ainsi:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{E}{K} = \frac{2K}{\pi}\frac{2E}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{2}k^2\right)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 16q^2(1 + 2q^2 + 4q^4 + \ldots).$$

Mais, puisqu'on a (JACOBI, Fund. nov. p. 105):

$$\left(1 - \frac{1}{2}k^2\right)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 24q^2 + 24q^4 + 96q^6 + \ldots,$$

il viendra:

$$\frac{2K}{\pi}\frac{2E}{\pi} = 1 + 8q^2 - 8q^4 + 32q^6 - \ldots,$$

d'où l'on tire, aisément, la formule signalée.

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi = -32q^2(1+2q^2+\ldots) + \frac{16q}{1-q^2}\cos 2x + \frac{32q^2}{1-q^4}\cos 4x + \ldots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \mathrm{dn}\,\xi^2 = 1 + 8q^2 - 8q^4 + \ldots + \frac{8q}{1-q^2}\cos 2x + \frac{16q^2}{1-q^4}\cos 4x + \ldots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi^2 = 32q^2(1+2q^2+\ldots) + 16q(1+9q^2)\cos 2x + 96q^2\cos 4x,$$

où nous allons introduire les expressions de $\sin 2x, \ldots$, obtenues tout-à-l'heure. Il résulte de la sorte:

$$\frac{2K}{\pi}\frac{k^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi}{\mathrm{dn}\,\xi} = 16q(1-19q^2)\sin 2u + 64q^2 \sin 4u + \ldots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi = 16q(1-51q^2)\sin 2u + 128q^2\sin 4u + \ldots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi = -96q^2 + 1344q^4 + 16q(1-27q^2)\cos 2u + 96q^2\cos 4u,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \mathrm{dn}\,\xi^2 = 1 - 24q^2 + 696q^4 + 8q(1-27q^2)\cos 2u + 48q^2\cos 4u + \ldots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi^2 = -32q^2 + 2496q^4 + 16q(1-51q^2)\cos 2u + 160q^2\cos 4u + \ldots.$$

Finalement, puisqu'on a:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \mathrm{dn}\,\omega^2 = 1 + 8q^2 - 8q^4 + 8q(1+q^2)\cos 2u + 16q^2\cos 4u + \ldots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 \mathrm{dn}\,\omega^4 = 1 + 48q^2 + 240q^4 + 16q(1+17q^2)\cos 2u + 64q^2\cos 4u + \ldots,$$

on formera aisément les expressions que voici:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 \frac{k^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi}{\mathrm{dn}\,\xi} \mathrm{dn}\,\omega^2 = 16q(1 - 3q^2)\sin 2u + 128q^2 \sin 4u + \ldots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi\, \mathrm{dn}\,\omega^4 = 32q^2 - 1472q^4 + 16q(1 + 5q^2)\cos 2u$$
$$+ 224q^2 \cos 4u + \ldots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^7 k^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi\, \mathrm{dn}\,\xi\, \mathrm{dn}\,\omega^4 = 16q(1 + 29q^2)\sin 2u + 256q^2 \sin 4u + \ldots$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^5 \frac{k^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi}{\mathrm{dn}\,\xi} \mathrm{dn}\,\omega^4 = 16q(1 + 29q^2)\sin 2u + 192q^2 \sin 4u + \ldots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^8 k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi\, \mathrm{dn}\,\xi^2\, \mathrm{dn}\,\omega^4 = 96q^2 + 1728q^4 + 16q(1 + 77q^2)\cos 2u$$
$$+ 288q^2 \cos 4u + \ldots.$$

Ayant obtenu ces développements, on aura immédiatement, en les introduisant dans l'équation (13), celle-ci:

$$(14) \qquad \frac{d^2z}{du^2} + \{192q^3 \sin 2u - 128q^2 \sin 4u\}\frac{dz}{du}$$
$$+ h_2\{64q^2 - 3968q^4 + 32q(1 - 11q^2)\cos 2u + 448q^2 \cos 4u\}z$$
$$-\{16q(1 + 13q^2)\sin 2u + 256q^2 \sin 4u\}z^2$$
$$-\frac{2}{3}\{96q^2 + 192q^4 + 16q(1 + 61q^2)\cos 2u + 288q^2 \cos 4u\}z^3$$
$$= -h_2\{16q(1 + 13q^2)\sin 2u + 192q^2 \sin 4u\}$$
$$-\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1 - 16q^2)\frac{\mathrm{dn}\,\omega^4}{\mathrm{dn}\,\xi}(X + \Omega).$$

6. Après avoir établi l'équation (14), il nous reste à la transformer au moyen d'une substitution convenable, de manière à débarrasser les divers termes des facteurs trigonométriques. Cette transformation dont la théorie générale a été exposée dans le paragraphe 5, s'opère dans notre cas tout simplement en adoptant l'expression

$$(15)\qquad z = y - 4q(1+13q^2)\sin 2u . y^2 - \frac{8}{3}q(1+61q^2)\cos 2u . y^3$$
$$- 16q^2 \sin 4u . y^2 - 16q^2 \cos 4u . y^3$$
$$+ 4h_2 q(1+13q^2)\sin 2u + 8h_2 q(1-11q^2)\cos 2u . y$$
$$+ 12h_2 q^2 \sin 4u + 28h_2 q^2 \cos 4u . y$$
$$- 8q(1+13q^2)\cos 2u . y\frac{dy}{du} + 8q(1+61q^2)\sin 2u . y^2\frac{dy}{du}$$
$$- 16q^2\cos 4u . y\frac{dy}{du} + 24q^2 \sin 4u . y^2\frac{dy}{du}.$$

On en obtient par différentiation:

$$\frac{dz}{du} = \frac{dy}{du} - 8q(1+13q^2)\cos 2u . y^2 + \frac{16}{3}q(1+61q^2)\sin 2u . y^3$$
$$- 64q^2\cos 4u . y^2 + 64q^2 \sin 4u . y^3$$
$$+ 8h_2 q(1+13q^2)\cos 2u - 16h_2 q(1-11q^2)\sin 2u . y$$
$$+ 48h_2 q^2 \cos 4u - 112h_2 q^2 \sin 4u . y$$
$$+ 8q(1+13q^2)\sin 2u . y\frac{dy}{du} + 8q(1+61q^2)\cos 2u . y^2\frac{dy}{du}$$
$$+ 32q^2 \sin 4u . y\frac{dy}{du} + 48q^2\cos 4u . y^2\frac{dy}{du}$$
$$+ \left\{8h_2 q(1-11q^2)\cos 2u + 28h_2 q^2\cos 4u\right\}\frac{dy}{du}$$
$$- \left\{8q(1+13q^2)\cos 2u + 16q^2\cos 4u\right\}\left\{\left(\frac{dy}{du}\right)^2 + y\frac{d^2y}{du^2}\right\}$$
$$+ \left\{8q(1+61q^2)\sin 2u + 24q^2 \sin 4u\right\}\left\{2y\left(\frac{dy}{du}\right)^2 + y^2\frac{d^2y}{du^2}\right\}$$

et puis:

$$\frac{d^2z}{du^2} = \frac{d^2y}{du^2} + 16q(1 + 13q^2)\sin 2u . y^2 + \frac{32}{3}q(1 + 61q^2)\cos 2u . y^3$$
$$+ 256q^2 \sin 4u . y^2 + 256q^2 \cos 4u . y^3$$
$$- 16h_2q(1 + 13q^2)\sin 2u - 32h_2q(1 - 11q^2)\cos 2u . y$$
$$- 192h_2q^2 \sin 4u - 448h_2q^2 \cos 4u . y$$
$$-\{32h_2q(1 - 11q^2)\sin 2u + 224h_2q^2\sin 4u\}\frac{dy}{du}$$
$$+\{24q(1 + 13q^2)\sin 2u + 96q^2\sin 4u\}\left\{\left(\frac{dy}{du}\right)^2 + y\frac{d^2y}{du^2}\right\}$$
$$+\{24q(1 + 61q^2)\cos 2u + 144q^2\cos 4u\}\left\{2y\left(\frac{dy}{du}\right)^2 + y^2\frac{d^2y}{du^2}\right\}$$
$$+\{8h_2q(1 - 11q^2)\cos 2u + 28h_2q^2\cos 4u\}\frac{d^3y}{du^3}$$
$$-\{8q(1 + 13q^2)\cos 2u + 16q^2\cos 4u\}\left\{3\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{du^2} + y\frac{d^3y}{du^3}\right\}$$
$$+\{8q(1 + 61q^2)\sin 2u + 24q^2\sin 4u\}\left\{2\left(\frac{dy}{du}\right)^3 + 6y\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{du^2} + y^2\frac{d^3y}{du^3}\right\}.$$

On obtient encore:

$$z^2 = y^2 - 8q(1 + 13q^2)\sin 2u . y^3 - 32q^2\sin 4u . y^3$$
$$+\{8h_2q(1 + 13q^2)\sin 2u + 24h_2q^2\sin 4u\}y$$
$$-\{16q(1 + 13q^2)\cos 2u + 32q^2\cos 4u\}y^2\frac{dy}{du}.$$

Avec les expressions que nous venons de signaler, on déduit de l'équation (14) la suivante, où l'on a omis les termes surpassant le quatrième ordre et le troisième degré, la dérivée $\frac{dy}{du}$ étant toujours considérée comme une quantité du premier ordre et du premier degré:

$$\frac{d^2y}{du^2} + 2048q^4y^3 - 3072q^4h_2y$$
$$+ \{192q^3 \sin 2u - 128q^2 \sin 4u\}\frac{dy}{du}$$
$$+ 8.64q^3 \sin 2u(y^2 - h_2) + \frac{64.44}{3}q^3 \cos 2u . y^3$$
$$- \{192q^3 \cos 2u - 64q^2 \cos 4u\}h_2y$$
$$- 8.64q^3 \cos 2u . y\frac{dy}{du} + \{20.64q^3 \sin 2u + 128q^2 \sin 4u\}y^2\frac{dy}{du}$$
$$- \{32q(1 + 5q^2) \sin 2u + 224q^2 \sin 4u\}h_2 \frac{dy}{du}$$
$$+ \{24q(1 + 13q^2) \sin 2u + 96q^2 \sin 4u\}\left\{\left(\frac{dy}{du}\right)^2 + y\frac{d^2y}{du^2}\right\}$$
$$+ \{24q(1 + 61q^2) \cos 2u + 144q^2 \cos 4u\}\left\{2y\left(\frac{dy}{du}\right)^2 + y^2\frac{d^2y}{du^2}\right\}$$
$$- \{8q(1 + 13q^2) \cos 2u + 16q^2 \cos 4u\}\left\{3\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{du^2} + y\frac{d^3y}{du^3}\right\}$$
$$+ \{8q(1 + 61q^2) \sin 2u + 24q^2 \sin 4u\}\left\{2\left(\frac{dy}{du}\right)^3 + 6y\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{du^2} + y^2\frac{d^3y}{du^3}\right\}$$
$$+ \{8q(1 - 11q^2) \cos 2u + 28q^2 \cos 4u\}h_2 \frac{d^2y}{du^2}$$
$$= - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(1 - 16q^2)\frac{\mathrm{dn}\,\omega^4}{\mathrm{dn}\,\xi}(X + \Omega),$$

ou bien, en rassemblant les termes multipliés par $\frac{d^2y}{du^2}$, et en négligeant encore certains termes sans importance,

$$\frac{d^2y}{du^2}\left\{\begin{matrix} 1 + (24q \sin 2u + 96q^2 \sin 4u)y + (24q \cos 2u + 144q^2 \cos 4u)y^2 \\ - (24q \cos 2u + 48q^2 \cos 4u)\frac{dy}{du} + (48q \sin 2u + 144q^2 \sin 4u)y\frac{dy}{du}\end{matrix}\right\}$$
$$+ 2048q^4y^3 - 3072q^4h_2y + 512q^3 \sin 2u(y^2 - h_2)$$
$$+ \{24q \sin 2u + 96q^2 \sin 4u\}\left(\frac{dy}{du}\right)^2 - 8q \cos 2u . y\frac{d^3y}{du^3}$$
$$= - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(1 - 16q^2)\frac{\mathrm{dn}\,\omega^4}{\mathrm{dn}\,\xi}(X + \Omega).$$

Arrivé à cette équation, nous la multiplions par:

$$\{1 + 24q \sin 2u . y + \ldots\}^{-1} = 1 - 24q \sin 2u . y + \ldots;$$

puis, en considérant que les termes essentiels à facteur trigonométrique de l'expression $\frac{d^2y}{du^2}$ sont ceux-ci:

$$\frac{d^2y}{du^2} = -512q^3 \sin 2u(y^2 - h_2) - 24q \sin 2u\left(\frac{dy}{du}\right)^2,$$

d'où l'on tire:

$$\frac{d^3y}{du^3} = -1024q^3 \cos 2u(y^2 - h_2) - 48q \cos 2u\left(\frac{dy}{du}\right)^2 - \ldots,$$

nous introduisons cette valeur dans l'équation dont il s'agit. Maintenant, si dans le premier membre, nous rejetons les termes du deuxième ordre dépendant d'une fonction trigonométrique, termes qui en effet sont très peu sensibles, il en résulte:

$$(16) \quad \frac{d^2y}{du^2} - 1024q^4h_2y - 96q^2\left(\frac{dy}{du}\right)^2 y + 24q \sin 2u\left(\frac{dy}{du}\right)^2 - 8q \cos 2u . y\frac{d^3y}{du^3}$$
$$= -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(1 - 16q^2)(1 - 24q \sin 2u . y + \ldots)\frac{\mathrm{dn}\,\omega^4}{\mathrm{dn}\,\xi}(X + \Omega),$$ [1]

équation dans laquelle on a toutefois négligé, parmi d'autres termes aussi quelques-uns dépendant de la troisième et de la quatrième dérivée de y.

En supposant que y soit finalement exprimé au moyen d'une suite de termes trigonométriques, il est visible que la fonction $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ renfermera un terme constant, nécessairement positif, du même ordre que la somme des termes périodiques. En ne considérant, dans une première approximation, que cette partie constante, on parvient à un résultat de la forme

$$(17) \qquad \frac{d^2y}{du^2} - \beta_1 y = -Q,$$

---

[1] En formant une nouvelle expression de $\frac{d^3y}{du^3}$, il faut évidemment rejeter le terme $-48q \cos 2u\left(\frac{dy}{du}\right)^2$.

où β_1 signifie une constante positive du quatrième ordre par rapport aux forces perturbatrices, et Q, une suite de termes trigonométriques qui s'obtiennent en développant l'expression

$$Q = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1 - 16q^2)(1 - 24q \sin 2u . y + \ldots) \frac{\mathrm{dn}\, \omega^4}{\mathrm{dn}\, \xi} (X + \Omega).$$

Les transformations que nous venons d'opérer ont fait naître, dans l'équation résultante, quelques termes de nature particulière, à savoir des termes qui ne sont multipliés ni par une fonction trigonométrique de la variable indépendante, ni par quelque autre fonction de cette variable, mais lesquels se composent de deux facteurs, dont l'un est fonction des coefficients constants entrant dans l'expression de y et l'autre fonction de y et de sa première dérivée. Ces termes — je les appellerai termes à facteur horistique ou, plus brièvement, termes horistiques [1] — sont dans la théorie des mouvements des corps célestes, on l'entend aisément, de la plus grande importance: en effet, la présence des termes de la nature envisagée rend convergentes et, quant au résultat numérique, limitées, les solutions des équations différentielles, tandis que, sans eux, le procès d'intégration pourrait aboutir à un résultat divergent.

Cependant, les coefficients constants des termes dont il s'agit n'étant que très petits, l'influence qu'ils peuvent exercer est, à l'ordinaire, peu sensible, et le mode de calcul des inégalités planétaires devient, dans la plupart des cas, presque le même que celui qu'on a employé dans les théories antérieures. Pourtant, si la période d'une inégalité est très longue, et surtout s'il s'agit du calcul d'un terme élémentaire ou de la détermination d'un terme de libration, la forme plus complète de l'équation différentielle que nous avons mise en évidence, l'emportera sur celle qu'on obtient en négligeant, dès le début, les termes d'un ordre plus élevé que le premier.

7. Il s'est montré, dans ce qui précède, que les coefficients des termes à facteur horistique sont du quatrième ordre par rapport aux forces perturbatrices: venons maintenant à l'examen des termes analogues provenant de l'équation (12), si l'on y ajoute l'expression

---

[1] ὁριστικός, appartenant à ce qui limite, qui termine.

$$X = \frac{s_0}{2\lambda_0^2} A_0' \sin(G_0 + s_0 T) \frac{dT}{dv}$$

$$= \frac{s_0}{2\lambda_0} A_0' \sin(G_0 + s_0 T) \frac{dT}{dx}.$$

Faisons d'abord:

$$A_0' = \frac{s_0}{\lambda_0} A_0 p \left\{ 1 - \frac{4h_2}{1.2} + \ldots \right\},$$

ce qui nous donne:

$$X = \frac{s_0}{2} p k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \sin(G_0 + s_0 T) \frac{dT}{dx},$$

et considérons les formules

$$T = Z_0 + \frac{2}{s_0} V_1,$$

$$s_0 \frac{dZ_0}{dx} = 2\left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi - 1\right);$$

l'expression de X prend alors la forme que voici:

$$(18) \qquad X = p\left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi - 1\right) \Big\{ k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi + 2k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi . V_1$$

$$- 2k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi . V_1^2 - \frac{4}{3} k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi . V_1^3 - \ldots \Big\}$$

$$+ p \left\{ k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi + 2k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi . V_1 - \ldots \right\} \frac{dV_1}{dx}.$$

Puis, en introduisant les valeurs

$$V_1 = \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi . z; \qquad \frac{dV_1}{dx} = \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi \frac{dz}{dx} - \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi . z,$$

l'expression précédente se transforme en celle-ci:

$$(19) \qquad X = pk^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi - 1\right) \sin 2 \operatorname{am} \xi$$

$$- \Big\{ - 2pk^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi - 1\right) \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi$$

$$+ \frac{1}{2} pk^4 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 \sin 2 \operatorname{am} \xi^2 \Big\} z$$

$$-\left\{2pk^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4\left(\frac{2K}{\pi}\operatorname{dn}\xi - 1\right)\sin 2\operatorname{am}\xi\operatorname{dn}\xi^2\right.$$

$$\left.+\ pk^4\left(\frac{2K}{\pi}\right)^5\sin 2\operatorname{am}\xi\cos 2\operatorname{am}\xi\operatorname{dn}\xi\right\}z^2$$

$$-\left\{\frac{4}{3}pk^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^5\left(\frac{2K}{\pi}\operatorname{dn}\xi - 1\right)\cos 2\operatorname{am}\xi\operatorname{dn}\xi^3\right.$$

$$\left.-\ k^4\left(\frac{2K}{\pi}\right)^6\sin 2\operatorname{am}\xi^2\operatorname{dn}\xi^2\right\}z^3$$

$$-\ \ldots.$$

$$+\ pk^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\sin 2\operatorname{am}\xi\operatorname{dn}\xi\frac{dz}{dx}$$

$$+\ 2pk^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4\cos 2\operatorname{am}\xi\operatorname{dn}\xi^2 z\frac{dz}{dx}$$

$$-\ 2pk^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^5\sin 2\operatorname{am}\xi\operatorname{dn}\xi^3 z^2\frac{dz}{dx}$$

$$-\ \frac{4}{3}pk^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^6\cos 2\operatorname{am}\xi\operatorname{dn}\xi^4 z^3\frac{dz}{dx}$$

$$-\ \ldots.$$

En ne demandant que les termes du deuxième ordre par rapport à q, il sera permis de remplacer, généralement, la variable x par u, ou ξ par ω; seulement dans le terme qui se trouve multiplié par $z\frac{dz}{dx}$, il est indispensable d'employer l'expression plus rigoureuse du coefficient, ainsi que de tenir compte du facteur

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3(1 - 16q^2)\frac{\operatorname{dn}\omega^4}{\operatorname{dn}\xi} = 1 + 24q^2 + 12q\cos 2u + \ldots,$$

qui peut être égalé à l'unité dans les autres termes.

Avec l'expression de $k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4\cos 2\operatorname{am}\xi\operatorname{dn}\xi^2$ que nous avons donnée dans le n° 5, il s'obtient:

$$2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3(1 - 16q^2)\frac{\operatorname{dn}\omega^4}{\operatorname{dn}\xi}k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4\cos 2\operatorname{am}\xi\operatorname{dn}\xi^2$$

$$= 128q^2 + 32q\cos 2u + \ldots.$$

Maintenant, si nous portons dans l'expression de X, la valeur de z donnée par l'équation (15), ainsi que celles de $\frac{dz}{dx}$, $z^2, \ldots$, et que nous nous rappelions la relation

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du}\{1 - 8q \cos 2u - \ldots\},$$

il est aisé de voir que la fonction X exprimée en y ne contiendra pas de termes du deuxième ordre de la forme $\beta_1 y$, ni de la forme $\beta_3 y^3$, β_1 et β_3 étant deux constantes de l'ordre de q^2. Il est encore visible, si l'on ne considère que les quantités du deuxième ordre, que les autres termes indépendants d'une fonction trigonométrique de l'argument u, ne proviennent que des produits $\sin 2u \frac{dz}{du}$, $\cos 2u . z \frac{dz}{du}, \ldots$. Retenons seulement les termes

$$\frac{dz}{du} = \frac{dy}{du} + 8q \sin 2u . y \frac{dy}{du} + 16q \sin 2u . y \left(\frac{dy}{du}\right)^2,$$

$$z \frac{dz}{du} = y \frac{dy}{du} - 16q \cos 2u . y \left(\frac{dy}{du}\right)^2,$$

introduisons-les dans l'expression précédente de X et rejetons les termes périodiques du deuxième ordre; nous aurons ainsi:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1 - 16q^2) \frac{\mathrm{dn}\, \omega^4}{\mathrm{dn}\, \xi} X = &- 64pq^2 y \frac{dy}{du} + 128pq^2 y \left(\frac{dy}{du}\right)^2 \\ &- 16pq \sin 2u \frac{dy}{du} - 32pq \cos 2u . y \frac{dy}{du} \\ &+ 32pq \sin 2u . y^2 \frac{dy}{du} + \ldots . \end{aligned}$$

Après avoir introduit, dans l'équation (16), l'expression que nous venons de trouver, il faut la multiplier par:

$$1 - 24q \sin 2u . y + 24q \cos 2u \frac{dy}{du} - 48q \sin 2u . y \frac{dy}{du} - \ldots .$$

Cette multiplication effectuée, nous aurons, au lieu de l'équation (16), celle-ci:

$$
(20)\qquad \begin{aligned}
&\frac{d^2y}{du^2} - 1024q^4h_2y - 128pq^2y\frac{dy}{du} - (96 + 128p)q^2y\left(\frac{dy}{du}\right)^2 \\
&= -16pq\sin 2u\frac{dy}{du} - 32pq\cos 2u.y\frac{dy}{du} + 32pq\sin 2u.y^2\frac{dy}{du} \\
&\quad - 24q\sin 2u\left(\frac{dy}{du}\right)^2 + 8q\cos 2u.y\frac{d^2y}{du^2} \\
&\quad - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(1 - 16q^2)(1 - 24q\sin 2u.y + \dots)\frac{\mathrm{dn}\,\omega^4}{\mathrm{dn}\,\xi}\Omega.
\end{aligned}
$$

Maintenant, pour débarrasser cette équation des termes périodiques dépendant de l'argument u, nous admettons, en désignant par ζ une fonction nouvelle,

$$y = \zeta + 4pq\sin 2u\frac{d\zeta}{du} + 8pq\cos 2u.\zeta\frac{d\zeta}{du} - 8pq\sin 2u.\zeta^2\frac{d\zeta}{du};$$

on en tire:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{du} &= \frac{d\zeta}{du} + 8pq\cos 2u\frac{d\zeta}{du} - 16pq\sin 2u.\zeta\frac{d\zeta}{du} - 16pq\cos 2u.\zeta^2\frac{d\zeta}{du} \\
&\quad + 4pq\sin 2u\frac{d^2\zeta}{du^2} + 8pq\cos 2u\left\{\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta\frac{d^2\zeta}{du^2}\right\} \\
&\quad - 8pq\sin 2u\left\{2\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta^2\frac{d^2\zeta}{du^2}\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{du^2} &= \frac{d^2\zeta}{du^2} - 16pq\sin 2u\frac{d\zeta}{du} - 32pq\cos 2u.\zeta\frac{d\zeta}{du} + 32pq\sin 2u.\zeta^2\frac{d\zeta}{du} \\
&\quad + 16pq\cos 2u\frac{d^2\zeta}{du^2} - 32pq\sin 2u\left\{\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta\frac{d^2\zeta}{du^2}\right\} \\
&\quad - 32pq\cos 2u\left\{2\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta^2\frac{d^2\zeta}{du^2}\right\} \\
&\quad + 4pq\sin 2u\frac{d^3\zeta}{du^3} + 8pq\cos 2u\left\{3\frac{d\zeta}{du}\frac{d^2\zeta}{du^2} + \zeta\frac{d^3\zeta}{du^3}\right\} \\
&\quad - 8pq\sin 2u\left\{2\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^3 + 6\zeta\frac{d\zeta}{du}\frac{d^2\zeta}{du^2} + \zeta^2\frac{d^3\zeta}{du^3}\right\},
\end{aligned}
$$

$$y\frac{dy}{du} = \zeta\frac{d\zeta}{du} + 8pq\cos 2u.\zeta\frac{d\zeta}{du} + 16\,pq\cos 2u.\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \ldots,$$

$$y^2\frac{dy}{du} = \zeta^2\frac{d\zeta}{du} + 8pq\sin 2u.\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \ldots,$$

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 - 32pq\sin 2u.\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \ldots.$$

Mais avant que nous allons introduire ces valeurs dans l'équation (20), examinons ce qu'il faut y placer au lieu du terme dépendant de $\frac{d^3y}{du^3}$.

Evidemment, puisqu'on a déjà tenu compte, dans l'équation (16), du terme $+\,24q\sin 2u\left(\frac{dy}{du}\right)^2$, la nouvelle expression de $\frac{d^3y}{du^3}$ ne devra contenir que les termes provenant de la fonction X. En considérant séparément ces termes, et en ne retenant que ceux qui sont périodiques et du premier ordre, nous aurons:

$$\frac{d^2y}{du^2} = -\,16pq\sin 2u\frac{dy}{du} - 32pq\cos 2u.y\frac{dy}{du} + \ldots,$$

ce qui nous donne:

$$\frac{d^3y}{du^3} = -\,32pq\cos 2u\frac{dy}{du} - 32pq\cos 2u\left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \ldots.$$

Avec cette valeur, l'équation (20) deviendra:

$$(20') \quad \frac{d^2y}{du^2} - 1024q^4h_2y - 96q^2y\left(\frac{dy}{du}\right)^2$$

$$= -\,16pq\sin 2u\frac{dy}{du} - 32pq\cos 2u.y\frac{dy}{du} + 32pq\sin 2u.y^2\frac{dy}{du}$$

$$-\,24q\sin 2u\left(\frac{dy}{du}\right)^2 - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(1 - 24q\sin 2u.y + \ldots)\frac{\mathrm{dn}\,\omega^4}{\mathrm{dn}\,\xi}\,\Omega.$$

C'est dans cette équation qu'il faut substituer les expressions que nous venons de trouver tout à l'heure.

On aperçoit de la sorte que la somme des termes de la forme

$$\text{const. }\zeta\frac{d\zeta}{du} + \text{const. }\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2$$

disparait, autant que ceux-ci résultent des termes

$$-16pq\sin 2u\frac{dy}{du}-32pq\cos 2u.y\frac{dy}{du}+32pq\sin 2u.y^2\frac{dy}{du}.$$

L'équation qui reste, et où l'on a rejeté tout terme inutile, sera donc la suivante:

$$\{1+16pq\cos 2u-32pq\sin 2u.\zeta-\ldots\}\frac{d^2\zeta}{du^2}-1024q^4h_2\zeta-96q^2\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2$$
$$-384pq^2\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2$$
$$=-24q\sin 2u\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2+32pq\sin 2u\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2+64pq\cos 2u.\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2$$
$$-\{4pq\sin 2u+8pq\cos 2u.\zeta-8pq\sin 2u.\zeta^2\}\frac{d^2\zeta}{du^2}$$
$$+\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(1-24q\sin 2u.\zeta+\ldots)\frac{\operatorname{dn}\omega^4}{\operatorname{dn}\xi}\Omega.$$

En multipliant cette équation par $\{1+16pq\cos 2u-32pq\sin 2u.\zeta-\ldots\}^{-1}$, le coefficient de $\frac{d^2\zeta}{du^2}$ deviendra égal à l'unité, et les termes dépourvus de facteurs trigonométriques provenant du produit

$$\{1-16pq\cos 2u+32pq\sin 2u.\zeta\}\Bigg\{-24q\sin 2u\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2+32pq\sin 2u\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2$$
$$+64pq\cos 2u.\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2\Bigg\},$$

forment, en s'ajoutant, un seul terme, savoir:

$$-384pq^2\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2,$$

de sorte que la multiplication envisagée fait disparaître, dans l'équation précédente, ce terme au premier membre. Mais puisqu'on a, en rejetant la fonction Ω, ainsi que tout terme d'un ordre surpassant le premier par rapport à q:

$$\frac{d^2\zeta}{du^2}=-24q\sin 2u\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2+32pq\sin 2u\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2+64pq\cos 2u.\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2,$$

d'où l'on déduit:

$$\frac{d^2\zeta}{du^2} = -48q\cos 2u\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + 64pq\cos 2u\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 - 128pq\sin 2u.\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \dots,$$

le terme dont il s'agit reparaît, mais réduit à la moitié de la valeur précédente; nous aurons donc, en écrivant finalement y au lieu de ζ:

$$(21) \qquad \frac{d^2y}{du^2} - 1024q^2h_2 y - (96 + 192p)q^2 y\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \{1 + \dots\}\Omega.$$

On aurait obtenu un résultat un peu modifié si, au lieu d'avoir adopté l'expression précédente de y, on avait retenu tous les termes mis en évidence, à l'exception de celui-ci:

$$4pq\sin 2u\frac{d\zeta}{du}.$$

En effet, avec les valeurs

$$\frac{dy}{du} = \frac{d\zeta}{du} - 16pq\sin 2u.\zeta\frac{d\zeta}{du} - 16pq\cos 2u.\zeta^2\frac{d\zeta}{du}$$
$$+ 8pq\cos 2u\left\{\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta\frac{d^2\zeta}{du^2}\right\} - 8pq\sin 2u\left\{2\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta^2\frac{d^2\zeta}{du^2}\right\},$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{d^2\zeta}{du^2} - 32pq\cos 2u.\zeta\frac{d\zeta}{du} + 32pq\sin 2u.\zeta^2\frac{d\zeta}{du}$$
$$-32pq\sin 2u\left\{\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta\frac{d^2\zeta}{du^2}\right\} - 32pq\cos 2u\left\{2\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta^2\frac{d^2\zeta}{du^2}\right\}$$
$$+ 8pq\cos 2u\left\{3\frac{d\zeta}{du}\frac{d^2\zeta}{du^2} + \zeta\frac{d^3\zeta}{du^3}\right\}$$
$$- 8pq\sin 2u\left\{2\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^3 + 6\zeta\frac{d\zeta}{du}\frac{d^2\zeta}{du^2} + \zeta^2\frac{d^3\zeta}{du^3}\right\},$$

$$y\frac{dy}{du} = \zeta\frac{d\zeta}{du} + 16pq\cos 2u.\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2; \qquad y^2\frac{dy}{du} = \zeta^2\frac{d\zeta}{du}$$

et:

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 - 32pq\sin 2u.\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2$$

on déduit immédiatement de l'équation (20') celle-ci:

$$\{1 - 32pq \sin 2u.\zeta - \ldots\}\frac{d^2\zeta}{du^2} - 1024q^4h_2\zeta - 128p^2q^2\zeta\frac{d\zeta}{du}$$
$$- (96 + 384p - 128p^2)q^2\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2$$
$$= -16pq\sin 2u\frac{d\zeta}{du} - 24q\sin 2u\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + 32pq\sin 2u\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + 64pq\cos 2u.\zeta\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2$$
$$- (8pq\cos 2u.\zeta - 8pq\sin 2u.\zeta^2)\frac{d^2\zeta}{du^2} + (1 + \ldots)\Omega.$$

En multipliant cette équation par:

$$1 + 32pq \sin 2u.\zeta + 48pq \sin 2u.\zeta\frac{d\zeta}{du} + \ldots$$

et en remplaçant $\frac{d^2\zeta}{du^2}$ par:

$$-32pq\cos 2u\frac{d\zeta}{du} + 64pq\cos 2u\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 - 48q\cos 2u\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2,$$

on parvient finalement au résultat suivant:

$$\frac{d^2y}{du^2} + 16pq\sin 2u\frac{dy}{du} - 1024q^4h_2y - (96 + 192p - 256p^2)q^2y\left(\frac{dy}{du}\right)^2 \tag{22}$$
$$= (1 + \ldots)\Omega$$

dans lequel on a mis y à la place de ζ.

8. Bien que les termes de la forme $\mu y\frac{dy}{du}$, visibles quelquefois dans nos calculs, aient disparu dans les équations (21) et (22), nous allons considérer une équation différentielle renfermant un tel terme: nous le retrouverons, en effet, en utilisant une substitution différente de celles que nous avons employées dans les n^os^ précédents.

L'apparition d'un terme de la forme envisagée rend extrêmement pénible l'intégration de l'équation dont il s'agit, et nous ne saurons surmonter les difficultés en provenant que par des approximations ou même par des tâtonnements. Afin de nous procurer une idée de ce qui

résulte de la présence du terme signalé, concevons d'abord l'équation très simple:

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2y}{du^2} + \mu y \frac{dy}{du} = -a \sin(\sigma u + b),$$

et désignons-y, pour abréger, l'angle $\sigma u + b$ par H.

Or, puisqu'il ne s'agit maintenant que d'une solution particulière, et pas du tout de l'intégrale complète, supposons:

$$y = x_1 \sin H + x_2 \sin 2H + \ldots$$

et cherchons à déterminer les coefficients.

D'abord, si σ n'est pas très petit, on pourrait commencer par mettre:

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots$$

et établir les équations

$$\frac{d^2y_0}{du^2} = -a \sin H,$$

$$\frac{d^2y_1}{du^2} = -\mu y_0 \frac{dy_0}{du},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

mais par cette voie, la détermination des y appartenant aux grandes valeurs des indices, deviendrait laborieuse, et encore, la convergence du développement supposé cesserait, si le rapport $\frac{\mu a}{\sigma^2}$ excédait une certaine limite. Il faut donc, dans certains cas, éviter le développement suivant les puissances de μ, bien que cette quantité soit généralement très petite.

En admettant le développement suivant les multiples de H, on en tire:

$$\begin{aligned} y^2 = {} & \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots) \\ & + (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots) \cos H \\ & + \left(-\frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots\right) \cos 2H \\ & + (-x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_5 + \ldots) \cos 3H \\ & + \ldots, \end{aligned}$$

ce qui donne par différentiation:

$$y\frac{dy}{du} = -\frac{\sigma}{2}(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots)\sin H$$
$$+ \frac{2\sigma}{2}\left(\frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_3 - x_2x_4 - \ldots\right)\sin 2H$$
$$+ \frac{3\sigma}{2}(x_1x_2 - x_1x_4 - x_2x_5 - \ldots)\sin 3H$$
$$+ \ldots.$$

En substituant ces expressions dans l'équation (α), et en égalant à zéro les coefficients des divers sinus, on obtiendra:

$$x_1\sigma^2 + \frac{\mu\sigma}{2}(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots) = a,$$
$$4x_2\sigma^2 - \frac{2\mu\sigma}{2}\left(\frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_3 - \ldots\right) = 0,$$
$$9x_3\sigma^2 - \frac{3\mu\sigma}{2}(x_1x_2 - x_1x_4 - \ldots) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il résulte de la deuxième de ces équations

$$x_2 = -\frac{\mu}{4\sigma}\left(\frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_3 - \ldots\right),$$

valeur avec laquelle on tire de la première la suivante:

$$\frac{\mu^2}{16}x_1^3 - \frac{\mu^2}{16}x_3x_1^2 + \left(\sigma^2 - \frac{\mu^2}{8}x_3^2\right)x_1 = a + \ldots.$$

Maintenant, en supposant les coefficients $x_3, x_4, \ldots$ ou connus, ou négligeables, il se comprend que la quantité x_1, qui s'obtient par la résolution de l'équation précédente du troisième degré, ne surpasse jamais une certaine limite qui s'approche d'autant plus de zéro, que la valeur de $\frac{16a}{\mu^2}$ est plus petite.

On aura facilement des résultats semblables relativement aux coefficients $x_2, x_3, \ldots.$ Donc, en admettant toujours la convergence du dé-

veloppement suivant les multiples de H, les résultats que nous venons d'obtenir nous permettent de calculer, au moyen d'approximations successives, les valeurs des coefficients demandés. Il faut toutefois remarquer que dans le cas où σ disparait, la série des x n'est plus convergente.

L'équation (α) se transforme facilement dans une autre dont la forme est, quelquefois, plus convenable. Pour y garder plus de généralité, désignons par Q une fonction toute connue de u, et considérons, au lieu de l'équation (α), celle-ci:

$$(\beta) \qquad \frac{d^2y}{du^2} + \mu y \frac{dy}{du} = Q.$$

On en tire immédiatement, en désignant par $-\frac{1}{2}\mu h_2$ la constante d'intégration, une première intégrale, à savoir:

$$\frac{dy}{du} + \frac{1}{2}\mu(y^2 - h_2) = \int Q du;$$

et, en vertu de ce résultat, il sera facile d'obtenir de l'équation (β) la suivante:

$$(\gamma) \qquad \frac{d^2y}{du^2} + \left(\frac{1}{2}\mu^2 h_2 + \mu\int Q du\right)y - \frac{1}{2}\mu^2 y^3 = Q.$$

Telle est la transformée de l'équation (β): on en conclut, toutes les fois que la fonction Q ne renferme qu'un nombre fini de termes trigonométriques, que le terme dépendant de μ tend à diminuer les coefficients dans la solution de l'équation dont il s'agit. Dans ce cas, on pourrait, en employant la méthode du § 5, réduire l'intégration de l'équation (γ) à celle d'un système d'équations linéaires et d'une équation du deuxième ordre et du troisième degré à coefficients constants et ne renferment plus aucun terme de la forme $\mu y \frac{dy}{du}$.

Mais si, par contre, la fonction Q contenait un terme constant, le coefficient de y, dans l'équation (γ), renfermerait la variable u multipliée par cette constante: l'integration de l'équation (γ) deviendrait, dans un tel cas, extrêmement difficile, et on ne saurait développer la fonction y dans la forme d'une série trigonométrique.

Ayant ainsi donné une idée du rôle que joue le terme dépendant de μ, nous allons examiner des cas plus compliqués que celui qui est représenté par l'équation (β).

9. Considérons d'abord l'équation

$$(\alpha)\qquad \frac{d^2y}{du^2} + \mu y\frac{dy}{du} = Q + R,$$

Q étant un polynôme contenant un nombre fini de termes purement trigonométriques et à coefficients constants, dont les arguments ne dépendent que de la variable u, et R, une fonction qui peut renfermer, parmi un nombre infini de termes trigonométriques, certains termes dépendant de l'inconnue y elle-même.

Dans l'équation signalée, nous allons remplacer la fonction y par la somme de deux nouvelles fonctions Y et Z, de sorte qu'on ait:

$$y = Y + Z,$$

ce qui entraîne:

$$\frac{d^2Y}{du^2} + \frac{d^2Z}{du^2} + \mu Y\frac{dY}{du} + \mu Y\frac{dZ}{du} + \mu Z\frac{dY}{du} + \mu Z\frac{dZ}{du} = Q + R.$$

L'une des fonctions Y et Z pouvant être choisie à volonté, nous établissons la relation

$$(\beta)\qquad \frac{d^2Z}{du^2} + \mu Y\frac{dY}{du} + \mu Z\frac{dZ}{du} = Q;$$

et nous retiendrons l'équation que voici:

$$(\gamma)\qquad \frac{d^2Y}{du^2} + \mu Y\frac{dZ}{du} + \mu Z\frac{dY}{du} = R.$$

De l'équation (β), on tire par intégration:

$$(\delta)\qquad \frac{dZ}{du} + \frac{1}{2}\mu(Y^2 - h_2) + \frac{1}{2}\mu Z^2 = \int Q du$$

$-\frac{1}{2}\mu h_2$ étant une constante surabondante, qui doit être déterminée de manière que le développement de $\frac{dZ}{du}$ ne contienne pas de terme constant. Evidemment, la valeur du binôme $Y^2 - h_2$ reste toujours négative.

Dans l'équation (δ), introduisons au lieu de Z une nouvelle fonction, ζ, dont la relation à la première soit:

$$Z = \frac{2}{1+\zeta}\frac{d\zeta}{\mu du}:$$

il en résultera l'équation

$$(\varepsilon) \qquad \frac{d^2\zeta}{du^2} + \left\{\frac{\mu^2}{4}(Y^2 - h_2) - \frac{1}{2}\mu\int Q du\right\}\zeta = -\frac{\mu^2}{4}(Y^2 - h_2) + \frac{1}{2}\mu\int Q du.$$

Cela posé, nous allons introduire, dans l'équation (γ), la valeur de $\frac{dZ}{du}$ tirée de l'équation (δ), et nous aurons, après avoir remplacé Z par $\frac{2}{1+\zeta}\frac{d\zeta}{\mu du}$, l'équation que voici:

$$\frac{d^2Y}{du^2} + \frac{2}{1+\zeta}\frac{d\zeta}{du}\frac{dY}{du} + \left\{-\frac{1}{2}\mu^2(Y^2 - h_2) - \frac{2}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \mu\int Q du\right\} Y = R,$$

d'où l'on tire, en admettant:

$$Y = \frac{1}{1+\zeta}U,$$

la suivante:

$$\frac{d^2U}{du^2} + \left\{-\frac{1}{2}\mu^2\left[\frac{U^2}{(1+\zeta)^2} - h_2\right] - \frac{2}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 - \frac{1}{1+\zeta}\frac{d^2\zeta}{du^2} + \mu\int Q du\right\} U = (1+\zeta)R,$$

ou bien, en introduisant la valeur

$$-\frac{1}{1+\zeta}\frac{d^2\zeta}{du^2} = \frac{\mu^2}{4}\left[\frac{U^2}{(1+\zeta)^2} - h_2\right] - \frac{1}{2}\mu\int Q du,$$

celle-ci:

$$(\zeta) \qquad \frac{d^2U}{du^2} + \left\{-\frac{1}{4}\mu^2\left[\frac{U^2}{(1+\zeta)^2} - h_2\right] - \frac{2}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu\int Q du\right\} U = (1+\zeta)R.$$

Des deux équations (ε) et (ζ), il faut déduire les deux inconnues ζ et U. Pour lever les difficultés adhérant à cette tâche, voici les démarches les plus convenables.

Au lieu de supposer Q tout connu, admettons maintenant:

$$Q = Q_0 + \zeta R_0$$

et puis:

$$R = R_0 - \zeta R_0 + F,$$

où nous avons désigné par Q_0 et R_0 deux fonctions tout connues dont nous supposons la première du deuxième degré ou bien égale à zéro et la seconde, du premier degré, et par F, une fonction du troisième degré dépendant de U et ζ.

Cela admis, la fonction ζ sera évidemment une quantité du deuxième degré, et si l'on néglige, dans l'équation (ζ), les quantités du quatrième degré, et que l'on suppose tout simplement:

$$F = \beta U^2,$$

il viendra:

$$(\eta) \qquad \frac{d^2U}{du^2} - \left\{\frac{1}{4}\mu^2(U^2 - h_2) + \beta U^2 - \frac{1}{2}\mu\int Q_0 du\right\} U = R_0.$$

Cette équation étant indépendante de ζ, on en déduira une valeur approchée de U, qu'il faut d'abord égaler à la fonction Y.

Ayant trouvé une valeur préalable de Y, on va chercher la fonction ζ en intégrant l'équation (ε) qui, si l'on néglige les termes du quatrième degré, s'écrit ainsi:

$$(\vartheta) \qquad \frac{d^2\zeta}{du^2} - \frac{1}{2}\mu R_0\zeta = -\frac{\mu^2}{2} Y \frac{dY}{du} + \frac{1}{2}\mu Q_0.$$

Certes, l'intégration de cette équation n'est pas facile, mais on parvient néanmoins, par approximations successives, à l'expression de ζ sans constantes arbitraires, tout ce qu'on demande ici: d'ailleurs, l'équation du troisième ordre se transforme aisément en une autre du deuxième degré qui n'est plus linéaire, mais dont la forme, si l'on néglige un terme du troisième degré, est bien celle de l'équation (α), de sorte qu'on pourrait appliquer, à son intégration, le procédé dont nous avons fait l'exposition précédemment. Mais on peut aussi, en partant de l'équation (ε), déduire directement une nouvelle équation de même nature que l'équation (ζ).

En effet, si nous posons:

$$\zeta = e^{\int \varphi du} - 1,$$

nous aurons de l'équation (ε) celle-ci:

$$\frac{d\varphi}{du} + \varphi^2 + \frac{\mu^2}{4}(Y^2 - h_2) - \frac{1}{2}\mu \int Q du = 0,$$

et puis, par différentiation:

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + 2\varphi \frac{d\varphi}{du} + \frac{\mu^2}{2} Y \frac{dY}{du} = \frac{1}{2}\mu Q.$$

En éliminant $\frac{d\varphi}{du}$ entre ces deux équations, et en admettant la notation

$$\varphi = \mu y_1,$$

il viendra:

$$\frac{d^2y_1}{du^2} - \left[\frac{\mu^2}{2}(Y^2 - h_2) + 2\mu^2 y_1^2 - \mu \int Q du\right] y_1 = -\frac{1}{2}\mu Y \frac{dY}{du} + \frac{1}{2} Q,$$

équation qui appartient, évidemment, au type de l'équation (ζ) ou de l'équation (η).

En intégrant l'équation que nous venons de trouver, nous pouvons dans la première approximation négliger Q, de sorte que le second membre soit réduit à:

$$-\frac{1}{2}\mu Y \frac{dY}{du}.$$

S'il s'agit de déterminer des termes élémentaires, la quantité signalée est du troisième ordre et du quatrième degré par rapport aux excentricités, tandis que R_0 est du deuxième ordre et du deuxième degré; en considérant les termes non-élémentaires, la fonction R_0 peut être du premier ordre, mais le produit $\mu Y \frac{dY}{du}$ est alors du quatrième ordre par rapport aux forces troublantes. On a donc obtenu une vraie approximation.

De la relation

$$\log(1 + \zeta) = \mu \int y_1 du$$

on déduit aisément:

$$Z = \frac{2}{1+\zeta}\frac{d\zeta}{\mu du} = 2y_1,$$

de sorte qu'on aura:

$$y = Y + 2y_1.$$

Evidemment, cette formule n'est qu'approximative; elle donne cependant, dans la plupart des cas, le résultat d'une exactitude suffisante.

10. Pour la transformation de l'équation (α) du numéro précédent, voici une autre méthode.

Faisons d'abord:

$$y = \frac{3U}{\mu\left(1+\int Udu\right)}, \tag{23}$$

ce qui nous donne:

$$\frac{dy}{du} = \frac{3}{\mu\left(1+\int Udu\right)}\frac{dU}{du} - \frac{3U^2}{\mu\left(1+\int Udu\right)^2},$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{3}{\mu\left(1+\int Udu\right)}\frac{d^2U}{du^2} - \frac{9}{\mu\left(1+\int Udu\right)^2}U\frac{dU}{du} + \frac{6U^3}{\mu\left(1+\int Udu\right)^3},$$

$$y\frac{dy}{du} = \frac{9}{\mu^2\left(1+\int Udu\right)^2}U\frac{dU}{du} - \frac{9U^3}{\mu^2\left(1+\int Udu\right)^3}.$$

En introduisant ces expressions dans l'équation dont j'ai parlé, il s'ensuit immédiatement:

$$\frac{d^2U}{du^2} - \frac{U^3}{\left(1+\int Udu\right)^2} = \frac{\mu}{3}\left(1+\int Udu\right)(Q+R). \tag{24}$$

Telle est l'équation transformée remplaçant l'équation (α): on l'utilisera avantageusement, mais seulement, bien entendu, en adoptant l'hypothèse que $\int Udu$ s'exprime au moyen d'un développement convergent, et que cette intégrale soit inférieure à l'unité. Mais en tous cas, l'emploi de la transformation indiquée se montre avantageuse s'il ne s'agit que

d'une solution approchée et que la somme d'un nombre fini de termes représentant l'intégrale dont nous avons parlé, ait une valeur suffisamment petite.

Concevons encore le cas où la fonction R renferme un terme de la forme

$$-yf(u),$$

$f(u)$ étant une fonction toute connue de u.

En désignant la somme des termes restants dans R par $\bar{R}$, nous aurons facilement de l'équation (24) la suivante:

$$(25)\qquad \frac{d^2U}{du^2} + f(u)U - U^2 = \frac{\mu}{3}\left(1 + \int U du\right)(Q + \bar{R}) - 2U^3\int U du - \ldots,$$

résultat dont nous pourrions faire application prochainement. Dans le cas des termes élémentaires, la fonction U est, le plus souvent, une quantité du deuxième ordre et l'intégrale $\int U du$ du premier.

11. La manière d'opérer la transformation de l'équation fondamentale que nous venons de poursuivre dans les n^{os} 5—7, se remplace avantageusement par plusieurs autres procédés, dont voici un qui mérite d'être examiné soigneusement.

Reprenons comme point de départ l'équation (4), à savoir, si nous admettons toujours la notation $\xi = \frac{2K}{\pi}x$, celle-ci:

$$(4')\qquad \frac{d^2V_1}{dx^2} + k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi . V_1 - k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi . V_1^2 - \frac{2}{3}k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi . V_1^3 = -X - \Omega.$$

Or, au lieu de faire disparaître le terme du premier degré, nous nous proposons seulement de débarrasser les termes du deuxième et du troisième degré des facteurs trigonométriques. On peut donc tout-d'abord mettre:

$$\varphi_{0,1} = 0,$$

ce qui entraîne immédiatement:

$$\varphi_{1.0} = 0.$$

Maintenant, en adoptant l'expression

$$\begin{aligned} V_1 = z &- \{4q(1 - 11q^2)\sin 2x + 4q^2 \sin 4x\}z^2 \\ &- \left\{\frac{8}{3}q(1 - 16q^2)\cos 2x + \frac{20}{3}q^2 \cos 4x\right\}z^3 \\ &- \{8q(1 - 11q^2)\cos 2x + 4q^2 \cos 4x\}z\frac{dz}{dx} \\ &+ \{8q(1 - 16q^2)\sin 2x + 10q^2 \sin 4x\}z^2\frac{dz}{dx}, \end{aligned}$$

nous aurons:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dx} = \frac{dz}{dx} &- \{8q(1 - 11q^2)\cos 2x + 16q^2 \cos 4x\}z^2 \\ &+ \left\{\frac{16}{3}q(1 - 16q^2)\sin 2x + \frac{80}{3}q^2 \sin 4x\right\}z^3 \\ &+ \{8q(1 - 11q^2)\sin 2x + 8q^2 \sin 4x\}z\frac{dz}{dx} \\ &+ \{8q(1 - 16q^2)\cos 2x + 20q^2 \cos 4x\}z^2\frac{dz}{dx} \\ &- \{8q(1 - 11q^2)\cos 2x + 4q^2 \cos 4x\}\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dx^2}\right\} \\ &+ \{8q(1 - 16q^2)\sin 2x + 10q^2 \sin 4x\}\left\{2z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z^2\frac{d^2z}{dx^2}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2V_1}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} &+ \{16q(1 - 11q^2)\sin 2x + 64q^2 \sin 4x\}z^2 \\ &+ \left\{\frac{32}{3}q(1 - 16q^2)\cos 2x + \frac{320}{3}q^2 \cos 4x\right\}z^3 \\ &+ \{24q(1 - 11q^2)\sin 2x + 24q^2 \sin 4x\}\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dx^2}\right\} \\ &+ \{24q(1 - 16q^2)\cos 2x + 60q^2 \cos 4x\}\left\{2z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z^2\frac{d^2z}{dx^2}\right\} \\ &- \{8q(1 - 11q^2)\cos 2x + 4q^2 \cos 4x\}\left\{3\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + z\frac{d^3z}{dx^3}\right\} \\ &+ \{8q(1 - 16q^2)\sin 2x + 10q^2 \sin 4x\}\left\{2\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 + 6z\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + z^2\frac{d^3z}{dx^3}\right\}, \end{aligned}$$

et encore:

$$V_1^2 = z^2 - \{8q(1 - 11q^2)\sin 2x + 8q^2 \sin 4x\}z^3$$
$$- \{16q(1 - 11q^2)\cos 2x + 8q^2 \cos 4x\}z^2 \frac{dz}{dx} - \ldots,$$
$$V_1^3 = z^3 - \ldots.$$

Ensuite, si nous établissons l'expression

$$k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi . V_1 = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi . z$$
$$+ \left\{-32q^2 - \ldots + \frac{16q}{1-q^2}\cos 2x + \frac{32q^2}{1-q^4}\cos 4x + \ldots\right\}$$
$$\times \left\{\begin{array}{l} - \{4q(1 - 11q^2)\sin 2x + 4q^2 \sin 4x\}z^2 \\ - \left\{\frac{8}{3}q(1 - 16q^2)\cos 2x + \frac{20}{3}q^2 \cos 4x\right\}z^3 \\ - \{8q(1 - 11q^2)\cos 2x + 4q^2 \cos 4x\}z\frac{dz}{dx} \\ + \{8q(1 - 16q^2)\sin 2x + 10q^2 \sin 4x\}z^2\frac{dz}{dx} \end{array}\right\}$$
$$= k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi . z$$
$$- \left\{\frac{64}{3}q^2(1 - 15q^2) + \frac{320}{3}q^4\right\}z^3 - 64q^2 z\frac{dz}{dx}$$
$$+ \{160q^3 \sin 2x - 32q^2 \sin 4x\}z^2$$
$$- \left\{\frac{32}{3}q^3 \cos 2x + \frac{64}{3}q^2 \cos 4x\right\}z^3$$

ainsi que celles-ci:

$$k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi . V_1^2 = -\{64q^2(1 - 12q^2) + 128q^4\}z^3$$
$$+ \{16q(1 - q^2)\sin 2x + 32q^2 \sin 4x\}z^2$$
$$- \{192q^3 \cos 2x - 64q^2 \cos 4x\}z^3,$$

$$\frac{2}{3}k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cos 2\,\mathrm{am}\,\xi . V_1^2 = -\left\{\frac{64}{3}q^2 + \frac{128}{3}q^4\right\}z^2$$
$$+\left\{\frac{32}{3}q(1+q^2)\cos 2x + \frac{64}{3}q^2\cos 4x\right\}z^2,$$

et que nous les introduisions dans l'équation (4'), il en résultera:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cos 2\,\mathrm{am}\,\xi . z + (64q^2 - 384q^4)z^3 - 64q^2z\frac{dz}{dx}$$
$$+\{24q(1-11q^2)\sin 2x + 24q^2\sin 4x\}\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dx^2}\right\}$$
$$+\{24q(1-16q^2)\cos 2x + 60q^2\cos 4x\}\left\{2z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z^2\frac{d^2z}{dx^2}\right\}$$
$$-\{8q(1-11q^2)\cos 2x + 4q^2\cos 4x\}\left\{3\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + z\frac{d^3z}{dx^3}\right\}$$
$$+\{8q(1-16q^2)\sin 2x + 10q^2\sin 4x\}\left\{2\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 + 6z\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + z^2\frac{d^3z}{dx^3}\right\}$$
$$= -X - \Omega.$$

En multipliant, pour égaler à l'unité le coefficient de $\frac{d^2z}{dx^2}$, l'équation précédente par:

$$\Big\{1 + [24q(1-11q^2)\sin 2x + 24q^2\sin 4x]z$$
$$+ [24q(1-16q^2)\cos 2x + 60q^2\cos 4x]z^2$$
$$- [24q(1-11q^2)\cos 2x + 12q^2\cos 4x]\frac{dz}{dx}$$
$$+ [48q(1-16q^2)\sin 2x + 60q^2\sin 4x]z\frac{dz}{dx}\Big\}^{-1}$$
$$= 1 - [24q(1-11q^2)\sin 2x + 24q^2\sin 4x]z$$
$$+ [24q(1-11q^2)\cos 2x + 12q^2\cos 4x]\frac{dz}{dx}$$
$$+ [12.24q^2 - 24q(1-40q^2)\cos 2x - 12.29q^2\cos 4x]z^2,$$

on obtiendra:

$$(26)\quad \frac{d^2z}{dx^2} + k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi . z + 64q^2z^3 - 384q^4z^3$$

$$+ 128q^2z\frac{dz}{dx} - 288q^2z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

$$-[12.16.48q^4 + 12.16q^2(1-39q^2) + 12.16.29q^4]z^3$$

$$+ 24q\sin 2x\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

$$-\{[8q(1-11q^2)\cos 2x + 4q^2\cos 4x]z + 96q^2z\frac{dz}{dx}$$

$$-[8q(1-16q^2)\sin 2x + 10q^2\sin 4x]z^2\}\frac{d^3z}{dx^3}$$

$$= -\left\{1 - 24q\sin 2x.z + 24q\cos 2x\frac{dz}{dx}\right.$$

$$\left. - 24q\cos 2x.z^2 + \ldots\right\}(X + \Omega),$$

ou, afin de faciliter au lecteur la vérification du calcul, on a mis en évidence, les différentes parties dont est composé le coefficient de z^3.

Il nous reste encore à remplacer, dans l'équation que nous venons de trouver, la troisième dérivée de z par sa valeur, autant qu'elle est connue.

Dans ce but, écrivons:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cos 2\,\mathrm{am}\,\xi.z - 24q\sin 2x\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - Z$$

$$= \{32q^2 - 16q(1+q^2)\cos 2x - 32q^2\cos 4x\}z - 24q\sin 2x\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - Z,$$

où la partie essentielle de Z est égale à $X + \Omega$.

De l'équation précédente, on tire par différentiation:

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \{32q(1+q^2)\sin 2x + 128q^2\sin 4x\}z - 48q\cos 2x\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

$$+ \{32q^2 - 16q\cos 2x - 32q^2\cos 4x\}\frac{dz}{dx} + \frac{dZ}{dx};$$

et maintenant, si l'on introduit cette valeur de $\frac{d^2z}{dx^2}$ dans l'équation (26), les termes du deuxième ordre de la forme

$$\text{const.}\, z^2$$

se détruisent, et on obtient l'équation que voici:

$$(27)\quad \frac{d^2z}{dx^2} + k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cos 2\,\mathrm{am}\,\xi . z - 8960q^4z^3 - 96q^2z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 192q^2z\frac{dz}{dx}$$

$$= - 24q\sin 2x\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

$$-\{[8q(1 - 11q^2)\cos 2x + 4q^2\cos 4x]z$$

$$- [8q(1 - 16q^2)\sin 2x + 10q^2\sin 4x]z^2\}\frac{dZ}{dz}$$

$$-\left\{1 - 24q\sin 2x . z + 24q\cos 2x . \frac{dz}{dx} - 24q\cos 2x . z^2 + \ldots\right\}(X + \Omega).$$

Cherchons maintenant les termes provenant de la fonction X en adoptant, pour cette fonction, la valeur que nous avons donnée par l'équation (18).

En ne demandant que les termes horistiques du deuxième ordre par rapport à q, nous aurons, en vertu de l'expression mentionnée, en y portant les valeurs précédentes de V_1, $\frac{dV_1}{dx}$, ...:

$$- X = - 32pq^2\sin 4x$$

$$- 64pq^2z + \left(\frac{128}{3} - \frac{128}{3}\right)pq^2z^3 + 128pq^2z^3$$

$$+ 128pq^2z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

$$- 16pq\sin 2x\frac{dz}{dx} - 32pq\cos 2x . z\frac{dz}{dx} + 32pq\sin 2x . z^2\frac{dz}{dx} + \ldots .$$

Il suffit également de mettre:

$$Z = + 16pq\sin 2x\frac{dz}{dx} + 32pq\cos 2x . z\frac{dz}{dx} + Z_1,$$

Z_1 étant une fonction renfermant les termes non considérés dans nos calculs actuels, et qui donneraient naissance à des termes horistiques d'un ordre ou degré plus élevés que le deuxième ou le troisième.

En différentiant l'expression signalée de Z, et ne retenant que les termes dépendant de $\cos 2x$ et de $\frac{dz}{dx}$, nous aurons:

$$\frac{dZ}{dx} = 32pq\cos 2x\frac{dz}{dx} + 32pq\cos 2x\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dZ_1}{dx}.$$

Maintenant, si nous introduisons cette expression dans l'équation (27), et que nous multipliions l'expression précédente de X par

$$1 - 24q\sin 2x.z + \ldots,$$

ce qu'exige l'équation (27), l'équation dont il s'agit prendra la forme

$$(28)\quad \frac{d^2z}{dx^2} + \left\{k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cos 2\,\mathrm{am}\,\xi + 64pq^2\right\}z + 16pq\sin 2x\frac{dz}{dx}$$

$$- (128pq^2 + 8960q^4)z^3 + (192 + 64p)q^2z\frac{dz}{dx} - (96 - 384p)q^2z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

$$= -24q\sin 2x\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - 32pq\cos 2x.z\frac{dz}{dx} + 32pq\sin 2x.z^2\frac{dz}{dx}$$

$$- 8q\cos 2x.z\frac{dZ_1}{dx}$$

$$- \{1 - 24q\sin 2x.z + \ldots\}\Omega,$$

où l'on a négligé le terme périodique du second ordre.

On pourrait se contenter du résultat que nous venons d'obtenir; cependant, pour garder plus d'homogénéité dans les termes périodiques restants, je préfère de chercher une autre équation ne contenant plus le terme de la forme

$$pq\cos 2x.z\frac{dz}{dx}.$$

Dans ce but, je fais la substitution de

$$z = y + 8pq \cos 2x . y \frac{dy}{dx}$$

et des expressions en découlant, à savoir:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 16pq \sin 2x . y \frac{dy}{dx} + 8pq \cos 2x \left\{ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} \right\},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - 32pq \cos 2x . y \frac{dy}{dx} - 32pq \sin 2x \left\{ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} \right\}$$
$$+ 8pq \cos 2x \left\{ 3 \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + y \frac{d^3y}{dx^3} \right\}.$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 32pq \sin 2x . y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \ldots,$$

$$z \frac{dz}{dx} = y \frac{dy}{dx} + \ldots,$$

dans l'équation (28), et j'obtiens:

$$\left\{ 1 - 32pq \sin 2x . y + 24pq \cos 2x \frac{dy}{dx} \right\} \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ 16pq \sin 2x \frac{dy}{dx} + \left\{ k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi + 64pq^2 \right\} y - (128pq^2 + 8960q^4) y^3$$
$$+ (192q^2 + 128pq^2 - 128p^2q^2) y \frac{dy}{dx} - 96q^2 y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$= -24q \sin 2x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 32pq \sin 2x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 32pq \sin 2x . y^2 \frac{dy}{dx}$$
$$- 8pq \cos 2x . y \frac{d^3y}{dx^3} - \{ 1 - 24q \sin 2x . y + \ldots \} \Omega.$$

En multipliant ce résultat, dans lequel on peut supprimer le terme dépendant de $\frac{dZ_1}{dx}$, par $\left\{ 1 - 32pq \sin 2x . y + 24pq \cos 2x \frac{dy}{dx} \right\}^{-1}$, et en y portant l'expression

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -16q \cos 2x \frac{dy}{dx} - 32pq \cos 2x \frac{dy}{dx} - 48q \cos 2x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 64pq \cos 2x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

on obtient finalement:

$$(29)\quad \frac{d^2y}{dx^2} + 16pq\sin 2x\frac{dy}{dx} + \left\{k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cos 2\operatorname{am}\xi + 64pq^2\right\}y$$

$$-\{128pq^2+8960q^4\}y^3 + 64(3-2p)q^2y\frac{dy}{dx} - 32(3-6p+8p^2)q^2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$= -8(3-4p)q\sin 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 32pq\sin 2x.y^2\frac{dy}{dx}$$

$$-(1-24q\sin 2x.y+\ldots)\Omega.$$

Dans cette équation, qu'on peut regarder comme le résultat essentiel de nos transformations, il faut remarquer que le coefficient de y^3 ne contient pas tous les termes du quatrième ordre; mais les termes qui y manquent encore, ne peuvent pas, excepté dans un cas spécial, annuler ce coefficient, vu qu'ils sont multipliés par le nombre irrationnel p ou bien par son carré.

12. Si l'on avait introduit, dans l'équation (27), au lieu de la valeur de X qu'on a empruntée à l'équation (18), un terme du type

$$A_1\sin(2\lambda_1 v + s_1 T),$$

on aurait obtenu des termes dépendant d'un nouveau module, et notamment de nouveaux termes horistiques. En désignant par q_1 la valeur de q qu'on déduit avec A_1, λ_1 et s_1, les nouveaux termes horistiques sont, pour la plus grande part, multipliés par $q^2q_1^2$ et par q_1^4; ils sont en conséquence du quatrième ordre. Le nombre de ces termes étant très grand, on pourrait croire que leur influence l'emportât sur les termes que nous venons de mettre en évidence. Cependant, ayant calculé ces termes par différentes méthodes, je me suis convaincu que leur somme n'aura d'autre effet que d'agrandir le coefficient négatif de y^3: le résultat que nous venons de donner par l'équation (29), n'aurait donc pas changé quant à la forme. Or, dans le mémoire présent, il ne s'agit pas de donner des formules parfaitement préparées à l'usage des calculateurs, mais seulement de désigner les methodes d'obtenir la solution absolue du problème des trois corps, tel qu'il se présente dans notre système planétaire. Voilà la raison pourquoi je me suis dispensé, pour le moment,

de communiquer mes recherches, d'ailleurs assez laborieuses, sur la totalité des termes horistiques; mais, j'ai pris cette résolution encore par un autre motif, dont voici l'explication.

Dans les calculs numériques exécutés d'après les régles qu'on pourrait déduire en intégrant l'équation (29) ou une autre équation de la même nature, il n'est pas du tout indispensable de connaître, dès l'abord, tout le coefficient d'un terme horistique; il suffit, au contraire, d'en avoir évalué la plus grande partie, disons un peu plus que la moitié. Cela se comprend aisément par un exemple, dans lequel on suivra la marche des approximations.

Supposons à cet égard qu'on ait l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (\nu^2 - \delta)y = - a_1 \sin H_1 - a_2 \sin H_2 - \ldots,$$

où les H sont donnés au moyen de la formule générale

$$H_n = \sigma_n x + b_n,$$

et où δ désigne une quantité positive ou négative, dont la valeur absolue est inférieure a ν^2. Supposont encore que la série des a soit convergente.

Cela étant, on voit immédiatement que si l'on commence par intégrer l'équation

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} - \nu^2 y_0 = - a_1 \sin H_1 - a_2 \sin H_2 - \ldots,$$

on aura tout d'abord le résultat approximatif

$$y_0 = \frac{a_1}{\sigma_1^2 + \nu^2} \sin H_1 + \frac{a_2}{\sigma_2^2 + \nu^2} \sin H_2 + \ldots,$$

développement qui est nécessairement convergent. Dans la deuxième approximation, supposons qu'on connaisse déjà une valeur approchée de δ, désignons-la par δ_0, et procédons à intégrer l'équation

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - \nu^2 y_1 = - \frac{a_1\delta_0}{\sigma_1^2 + \nu^2} \sin H_1 - \frac{a_2\delta_0}{\sigma_2^2 + \nu^2} \sin H_2 - \ldots,$$

d'où il résulte:

$$y_1 = \frac{a_1\delta_0}{(\sigma_1^2 + \nu^2)^2} \sin H_1 + \frac{a_2\delta_0}{(\sigma_2^2 + \nu^2)^2} \sin H_2 + \ldots,$$

Selon l'hypothèse, le rapport $\frac{\delta_0}{\nu^2}$ est inférieur à l'unité; donc, les fractions $\frac{\delta_0}{\sigma_1^2 + \nu^2}$, $\frac{\delta_0}{\sigma_2^2 + \nu^2}$, ... sont *à fortiori* moindres que l'unité. Il s'ensuit de là que le développement de y_1 sera aussi convergent.

Admettons que $\delta_0 + \delta_1$ soit une valeur plus approchée de δ que ne l'est δ_0 seul: or, nous allons intégrer l'équation

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} - \nu^2 y_2 = -a_1\left[\frac{\delta_0(\delta_0 + \delta_1)}{(\sigma_1^2 + \nu^2)^2} + \frac{\delta_1}{\sigma_1^2 + \nu^2}\right]\sin H_1$$
$$- a_2\left[\frac{\delta_0(\delta_0 + \delta_1)}{(\sigma_2^2 + \nu^2)^2} + \frac{\delta_1}{\sigma_2^2 + \nu^2}\right]\sin H_2 + \dots.$$

En continuant ces opérations, on trouvera dans la quatrième approximation:

$$y_3 = a_1\left[\frac{\delta_0(\delta_0 + \delta_1)(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{(\sigma_1^2 + \nu^2)^4} + \frac{\delta_1(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{(\sigma_1^2 + \nu^2)^3} + \frac{\delta_0\delta_1}{(\sigma_1^2 + \nu^2)^3} + \frac{\delta_2}{(\sigma_1^2 + \nu^2)^2}\right]\sin H_1$$
$$+ a_2\left[\frac{\delta_0(\delta_0 + \delta_1)(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{(\sigma_2^2 + \nu^2)^4} + \frac{\delta_1(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{(\sigma_2^2 + \nu^2)^3} + \frac{\delta_0\delta_1}{(\sigma_2^2 + \nu^2)^3} + \frac{\delta_2}{(\sigma_2^2 + \nu^2)^2}\right]\sin H_2$$
$$+ \dots$$

et ainsi de suite.

Maintenant, si l'on établit la somme de tous ces développements convergents, on aura, ce qu'on voit facilement, un résultat également convergent et identique à celui-ci:

$$y = \frac{a_1}{\sigma_1^2 + \nu^2 - \delta}\sin H_1 + \frac{a_2}{\sigma_2^2 + \nu^2 - \delta}\sin H_2 + \dots;$$

seulement, les divers coefficients de la somme dont nous avons parlé constituent certaines transformations des coefficients qui entrent dans l'expression dernièrement signalée.

Quant à la forme développée des coefficients, il se comprend aisément qu'elle admet des développements convergents, pourvu que la suite des approximations successives par lesquelles s'obtient δ, c'est à dire, la série

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \dots$$

soit convergente.

Puis, des conditions

$$\frac{\delta_0}{\nu^2} < 1 \; ; \; \delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \ldots,$$

on conclut la convergence de la suite

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots.$$

Mais on voit encore de ce que nous venons de mettre en évidence, qu'il est favorable de commencer les approximations par une valeur de ν^2 un peu plus forte, de façon à obtenir une valeur positive de δ_0. De cette manière, on trouverait les principales parties des divers coefficients des développements de $y_0, y_1, \ldots$ toujours positives, ainsi qu'un agrégat de termes positifs, quand on établit la somme des divers y_n. Evidemment, les différents termes dont la somme constitue un coefficient de la fonction complète y, seront de la sorte les plus petits possibles. Ainsi, une valeur positive de δ, c'est à dire une valeur un peu trop grande de ν^2, sera, en effet, plus avantageuse à la convergence des approximations successives, que ne l'est une valeur négative de δ ou bien, ce qui revient au même, une valeur de ν^2, inférieure à la valeur effective. Voilà aussi pourquoi l'emploi de l'équation (29) est préférable à celui de l'équation (17).

§ 7. *Equations linéaires.*

1. Par les transformations dont nous venons de faire l'exposition dans les deux paragraphes précédents, on a les moyens de ramener les équations différentielles de la mécanique céleste à des types plus simples, notamment à celui-ci:

$$\frac{d^2z}{dv^2} + Zz - \beta_3 z^3 = X, \tag{1}$$

où l'on a désigné par Z et X deux fonctions connues, dont la première se trouve très souvent réduite à un coefficient constant, et par β_3, une quantité toujours constante. Cependant, puisqu'il est inutile d'effectuer la réduction complète, ce qui serait aussi extrêmement difficile si non

impossible, on doit supposer la fonction X, non plus tout à fait connue, mais seulement quant à ses termes principaux, ceux-ci étant donnés par l'expression

$$-A_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} G_n .$$ [1]

La solution définitive ne s'obtient donc qu'au moyen d'approximations successives, dont la convergence n'est, cependant, soumise à aucun doute, pourvu que la partie de X qu'on a négligée d'abord soit suffisamment petite.

Mais l'intégration de l'équation proposée est néanmoins très pénible: elle ne s'opère aisément que dans deux cas particuliers. D'abord, si la fonction Z est remplacée par une constante et que la fonction X ne contienne qu'un seul terme, l'équation dont il s'agit s'intègre sans trop de peine, comme nous l'avons vu dans le Chap. I. Puis, s'il était possible de réduire notre équation à la forme linéaire, la forme du résultat serait telle qu'on en obtiendrait l'intégrale d'une manière aisée. Dans ce qui suit, nous allons examiner comment une telle réduction s'opère.

La principale objection qu'on peut faire contre l'emploi d'une équation linéaire comme point de départ des approximations successives est celle qu'il donne naissance à des expressions dont les dénominateurs peuvent acquérir des valeurs très petites et même évanouissantes. En effet, ayant formé l'équation linéaire tout simplement en supprimant le terme $-\beta_2 z^3$, on tombera dans une solution souvent assez inexacte et quelque fois même tout à fait inadmissible; et une telle équation ne fournira pas de fondement pour démontrer la convergence du résultat.

Mais si, au contraire, on opère la réduction à la forme linéaire en tenant compte, de la manière qu'on va apprendre prochainement, du terme en z^3, l'intégrale de l'équation transformée a la propriété de n'excéder jamais certaines limites. Les difficultés adhérant à l'emploi d'une équation linéaire où l'on a négligé entièrement les quantités du troisième degré, ayant ainsi disparu, on aura l'occasion fréquente de considérer des équations linéaires d'une forme spéciale.

Concevons maintenant la réduction de l'équation (1) à la forme linéaire.

---

[1] Nous admettons toujours: $G_n = 2\lambda_n v + 2B_n$, λ_n ayant une valeur quelconque.

2. En désignant par ψ une fonction encore indéterminée, nous allons introduire, dans l'équation (1), une nouvelle inconnue au lieu de z, en admettant la relation

$$z = \frac{y}{1 + \psi}.$$

Nous aurons de la sorte:

$$(2) \quad \frac{1}{1+\psi}\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{2}{(1+\psi)^2}\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv} + \left\{\frac{2}{(1+\psi)^3}\left(\frac{d\psi}{dv}\right)^2 - \frac{1}{(1+\psi)^2}\frac{d^2\psi}{dv^2} + \frac{Z}{1+\psi}\right\}y - \beta_3\frac{y^3}{(1+\psi)^3} = X,$$

et, si nous déterminons la fonction ψ de manière à satisfaire à la condition

$$(3) \qquad \frac{d^2\psi}{dv^2} = (1+\psi)\nu^2 - \beta_3\frac{y^2}{(1+\psi)},$$

ν^2 étant une constante, nous aurons, pour déterminer la fonction y, l'équation que voici:

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dv^2} - \frac{2}{1+\psi}\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv} + \left\{Z - \nu^2 + \frac{2}{(1+\psi)^2}\left(\frac{d\psi}{dv}\right)^2\right\}y = (1+\psi)X.$$

Cela étant, si nous admettons qu'on sache intégrer l'équation

$$(5) \qquad \frac{d^2y}{dv^2} + \{Z - \nu^2\}y = (1+\psi)X,$$

le second membre étant supposé connu, nous aurons immédiatement, en négligeant d'abord la quantité ψ, une valeur préalable de la fonction y.

Avec l'expression de y qu'on obtient ainsi, on va chercher la fonction ψ au moyen de l'équation (3); à cette occasion on doit aussi déterminer le coefficient ν^2 de manière que la fonction ψ soit dépourvue de tout terme constant.

Dans ce but, écrivons l'équation (3) de la manière suivante:

$$(3') \qquad \frac{d^2\psi}{dv^2} - 2\nu^2\psi = \nu^2 - \beta_3 y^2 - (\nu^2 - \beta_3 y^2)\psi - \beta_3 y^2\psi^2 + \ldots,$$

d'où il s'entend immédiatement *que la demi-somme des carrés de tous les*

coefficients que renferme l'expression de y, cette demi-somme multipliée par β_3 constitue la partie essentielle de la constante ν^2.

En effet, si nous admettons que l'intégrale de l'équation (5), les constantes arbitraires étant égalées a zéro, soit exprimée par le développement

$$y = \varkappa_1 \cos G_1 + \varkappa_2 \cos G_2 + \ldots,$$

il s'ensuivra:

$$y^2 = \frac{1}{2}(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \ldots) + \frac{1}{2}\varkappa_1^2 \cos 2G_1 + \frac{1}{2}\varkappa_2^2 \cos 2G_2 + \ldots$$
$$+ \varkappa_1\varkappa_2\{\cos(G_1 - G_2) + \cos(G_1 + G_2)\} + \ldots.$$

En introduisant cette expression dans l'équation précédente, on obtient tout d'abord les résultats approchés que voici:

$$\nu^2 = \frac{1}{2}\beta_3(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \ldots),$$

$$\psi = \frac{\frac{1}{2}\beta_3\varkappa_1^2}{16\lambda_1^2 + 2\nu^2}\cos 2G_1 + \frac{\frac{1}{2}\beta_3\varkappa_2^2}{16\lambda_2^2 + 2\nu^2}\cos 2G_2 + \ldots$$
$$+ \frac{\beta_3\varkappa_1\varkappa_2}{4(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 2\nu^2}\cos(G_1 - G_2) + \frac{\beta_3\varkappa_1\varkappa_2}{4(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 2\nu^2}\cos(G_1 + G_2) + \ldots,$$

développement dont la convergence est évidente, si la série

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots,$$

chaque terme étant pris avec le signe positif, jouit de cette propriété.

Ayant établi ces résultats, il sera facile de parvenir aux expressions algébriques des coefficients $\varkappa$, toutes les fois qu'on sait intégrer l'équation (5).

En admettant d'abord que la fonction Z soit réduite à une constante, $-g$, et en désignant par H la demi-somme

$$\frac{1}{2}(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \ldots),$$

de sorte qu'on ait:

$$\nu^2 = \beta_3 H,$$

les expressions des coefficients demandés seront visiblement celles-ci:

$$x_1 = \frac{A_1}{4\lambda_1^2 + g + \beta_3 H},$$

$$x_2 = \frac{A_2}{4\lambda_2^2 + g + \beta_3 H},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Maintenant, si nous établissons l'expression de la somme des carrés des divers x, il en résulte immédiatement l'équation

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{A_1^2}{[4\lambda_1^2 + g + \beta_3 H]^2} + \frac{A_2^2}{[4\lambda_2^2 + g + \beta_3 H]^2} + \cdots\right\}, \tag{6}$$

d'où s'obtient toujours une valeur réelle et positive de H, pourvu que la série mise entre les crochets soit convergente.

La fonction H déterminée de la sorte, je l'appellerai *fonction horistique,* vu que sa présence dans le coefficient de y rend la solution de l'équation linéaire convergente, et quant à sa valeur, limitée; en conséquence, une équation linéaire renfermant, dans le coefficient de l'inconnue même, une fonction horistique, sera appelée *équation horistique.* Mais je désignerai plus généralement par fonction horistique la somme des puissances paires des coefficients $x_1, x_2, \ldots,$ multipliées par des coefficients positifs quelconques.

Donc, par la réduction d'une équation contenant des termes horistiques, on est parvenu à une équation horistique.

La fonction H supposée réelle, il sera facile de démontrer la convergence de la série

$$x_1 + x_2 + \cdots.$$

Dans ce but, reprenons l'équation

$$x_n = \frac{A_n}{4\lambda_n^2 + g + \beta_3 H},$$

et posons-y:

$$4\lambda_n^2 + g + \beta_3 H - \frac{1}{2}\beta_3 x_n^2 = P,$$

la quantité P est donc indépendante de x_n; on obtient ainsi:

$$\frac{1}{2}\beta_3 x_n^3 + P x_n = A_n,$$

d'où l'on conclut que la valeur de x_n, quel que soit P, ne surpasse jamais la limite

$$2\sqrt[3]{\frac{A_n}{\beta_3}}.$$

Or, les A formant une série dont la convergence égale celle d'une progression géométrique, il s'ensuit que la convergence de la série dont il s'agit est au moins aussi rapide que celle de

$$\frac{2}{\sqrt[3]{\beta_3}}\{\sqrt[3]{A_1} + \sqrt[3]{A_2} + \sqrt[3]{A_3} + \ldots\}.$$

La recherche sur la convergence de notre développement est donc ramenée à celle de la réalité de la fonction horistique H.

3. En supposant, dans l'équation (6), une valeur positive de g, les termes du second membre forment nécessairement une série convergente; donc, la valeur de H sera réelle et positive.

Mais si, par contre, la valeur de g était négative, la discussion de l'équation (6) deviendrait délicate.

En entamant cette discussion, nous posons, pour abréger,

$$\vartheta_n = 4\lambda_n^2 + g;$$

puis, nous omettons l'indice 3 attaché à β, après quoi l'équation (6) s'écrira ainsi

$$\nu^2 = \frac{1}{2}\beta\left\{\frac{A_1^2}{(\vartheta_1 + \nu^2)^2} + \frac{A_2^2}{(\vartheta_2 + \nu^2)^2} + \ldots\right\}.$$

En utilisant toujours la notation

$$x_n = \frac{A_n}{\vartheta_n + \nu^2},$$

ce qui entraîne l'expression

$$\nu^2 = -\vartheta_n + \frac{A_n}{x_n},$$

nous aurons:

$$\frac{A_n}{x_n} = \vartheta_n + \frac{1}{2}\beta\{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\}.$$

Maintenant, si nous supposons fini le nombre des termes de X dans l'équation (5), on trouve toujours une valeur réelle et positive de la somme

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_{n+1}^2 + \ldots + x_m^2; \qquad m > n:$$

donc, en désignant cette somme par

$$\frac{2}{\beta}(P_m^{(n)} - \vartheta_n)$$

le coefficient $P_m^{(n)}$ dans l'équation

$$A_n = P_m^{(n)} x_n + \frac{1}{2}\beta x_n^3$$

est une quantité réelle et finie.

Puis, si l'on désigne par Z_n, sans tenir compte du signe, la valeur maximum que peut acquérir x_n pour une valeur réelle quelconque de $P_m^{(n)}$, on aura, quelles que soient les valeurs des quantités $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m$, ainsi que celles des coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_m$, la comparaison

$$Z_n \underline{\circ} \sqrt[3]{\frac{A_n}{\beta}},$$

d'où il s'ensuit:

$$\vartheta_n + \nu^2 \underline{\circ} \beta^{\frac{1}{3}} A_n^{\frac{2}{3}},$$

expression qui montre que la valeur minimum de $\vartheta_n + \nu^2$ ne peut s'abaisser au-dessous d'une quantité du même ordre que $\beta^{\frac{1}{3}} A_n^{\frac{2}{3}}$.

En supposant toujours que les A_n forment une suite de quantités, décroissant comme les termes d'une progression géométrique, il s'ensuit de ce que je viens d'établir, que les coefficients $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et *a fortiori*, leurs carrés $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2$ diminuent dans le rapport indiqué: et comme cette thèse est également vraie quelque grand que soit le nombre m, nous en concluons la convergence de la série

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire, que P_∞ est une quantité réelle et finie. Il nous reste à montrer qu'on peut toujours, au moyen d'approximations successives, s'approcher de la valeur exacte de ν^2.

Dans ce but, désignons par ν_m^2 ce que devient ν^2, lorsqu'on ne considère, dans l'équation (6), que les m premiers termes du second membre, et cherchons à déterminer la différence

$$\nu_{m+1}^2 - \nu_m^2 = \xi_{m+1},$$

dont la valeur s'obtient au moyen de l'équation

$$\begin{aligned}\xi_{m+1} = &-\beta\xi_{m+1}\left\{\frac{A_1^2}{(\vartheta_1 + \nu_m^2)(\vartheta_1 + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2}\right.\\ &\left.+ \frac{A_2^2}{(\vartheta_2 + \nu_m^2)(\vartheta_2 + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2} + \ldots + \frac{A_m^2}{(\vartheta_m + \nu_m^2)(\vartheta_m + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2}\right\}\\ &-\frac{1}{2}\beta\xi_{m+1}^2\left\{\frac{A_1^2}{(\vartheta_1 + \nu_m^2)^2(\vartheta_1 + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2}\right.\\ &\left.+ \frac{A_2^2}{(\vartheta_2 + \nu_m^2)^2(\vartheta_2 + \nu_2^2 + \xi_{m+1})^2} + \ldots + \frac{A_m^2}{(\vartheta_m + \nu_m^2)^2(\vartheta_m + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2}\right\}\\ &+\frac{1}{2}\beta\frac{A_{m+1}^2}{(\vartheta_{m+1} + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2}.\end{aligned}$$

En vertu des considérations précédentes, on conclut facilement que les rapports

$$\frac{\xi_{m+1}}{\vartheta_1 + \nu_m^2}, \quad \frac{\xi_{m+1}}{\vartheta_2 + \nu_m^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\xi_{m+1}}{\vartheta_m + \nu_m^2}$$

sont de petites quantités, lesquelles, dans une première approximation, il sera permis de négliger auprès de l'unité. L'équation que nous venons de signaler, s'écrit donc de la manière suivante:

$$\left\{1 + \frac{\beta A_1^2}{(\vartheta_1 + \nu_m^2)^3} + \frac{\beta A_2^2}{(\vartheta_2 + \nu_m^2)^3} + \ldots + \frac{\beta A_m^2}{(\vartheta_m + \nu_m^2)^3}\right\}\xi_{m+1} = \frac{1}{2}\frac{\beta A_{m+1}^2}{(\vartheta_{m+1} + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2},$$

d'où l'on tire toujours une valeur réelle de ξ_{m+1} qui s'évanouit avec A_{m+1}.

Après avoir repris l'équation primitive, il ne reste plus aucune difficulté à obtenir une valeur plus exacte de ξ_{m+1}.

De la manière indiquée, on parvient à déterminer les $\xi_{m+2}, \xi_{m+3}, \ldots$ sans autres inconvénients que ceux qui tiennent à la peine d'un long calcul numérique.

Ajoutons ici la remarque que tous les calculs précédents auraient été plus compliqués mais quant à leur porté et nature pas essentiellement changés, si l'équation (1) avait contenu les termes

$$Z_1 \frac{dz}{dv} - \beta_2 z \left(\frac{dz}{dv}\right)^2,$$

Z_1 étant une fonction connue de v. Je ne tiens pas, cependant, opportun d'entrer dans le détail y relatif.

4. Considérons maintenant le cas plus compliqué où la fonction Z n'a plus une valeur constante, mais désigne une fonction connue de v. En désignant par α une constante, nous supposons encore la fonction dont il s'agit telle, que si l'on met:

$$Z = \alpha + X,$$

l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Xy = 0$$

soit connue.

Admettons d'abord le développement

$$y = \psi_0 z + \psi_1 \frac{dz}{dx} + \psi_2 \frac{d^2z}{dx^2} + \ldots,$$

d'où l'on tire par différentiation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum \left\{ \frac{d^2\psi_n}{dx^2} \frac{d^nz}{dx^n} + 2 \frac{d\psi_n}{dx} \frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + \psi_n \frac{d^{n+2}z}{dx^{n+2}} \right\}.$$

Si nous portons ces expressions dans l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (X + \alpha)y = 0, \tag{7}$$

et que nous désignions par p une constante encore à notre disposition, il en résultera l'équation de condition que voici:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\frac{d^2\Psi_0}{dx^2}z + 2\frac{d\Psi_0}{dx}\frac{dz}{dx} + \Psi_0\frac{d^2z}{dx^2} \\ &\quad + \frac{d^2\Psi_1}{dx^2}\frac{dz}{dx} + 2\frac{d\Psi_1}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + \Psi_1\frac{d^3z}{dx^3} \\ &\qquad + \frac{d^2\Psi_2}{dx^2}\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{d\Psi_2}{dx}\frac{d^3z}{dx^3} + \Psi_2\frac{d^4z}{dx^4} \\ &\qquad\qquad + \dots \\ &+ (X + \alpha + p)\left\{\Psi_0 z + \Psi_1\frac{dz}{dx} + \dots\right\} - p\left\{\Psi_0 z + \Psi_1\frac{dz}{dx} + \dots\right\} = 0: \end{aligned}$$

évidemment, les termes multipliés par p s'annulent identiquement.

Pour satisfaire à cette condition, établissons avant tout l'équation

$$(9)\qquad \frac{d^2z}{dx^2} + (\alpha + p)z = 0,$$

ce qui donne:

$$\frac{d^3z}{dx^3} + (\alpha + p)\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} + (\alpha + p)\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

et encore:

$$z = -\frac{1}{\alpha + p}\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{(\alpha + p)^2}\frac{d^4z}{dx^4} = \dots,$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\alpha + p}\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{1}{(\alpha + p)^2}\frac{d^5z}{dx^5} = \dots.$$

Avec ces relations, on tire immédiatement de l'équation (8) une autre, où ont déjà disparu certains termes; puis si l'on met:

$$p = p_1 + p_2 + \dots,$$

et que l'on introduise, dans l'équation dont il s'agit,

$$pz = -\frac{p_1}{\alpha + p}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{p_2}{(\alpha + p)^2}\frac{d^4z}{dx^4} - \dots,$$

$$p\frac{dz}{dx} = -\frac{p_1}{\alpha + p}\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{p_2}{(\alpha + p)^2}\frac{d^5z}{dx^5} - \dots,$$

on parviendra, en égalant à zéro les coefficients de z, de $\frac{dz}{dx}, \ldots,$ aux conditions que voici:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d^2\Psi_0}{dx^2} + X\Psi_0 = 0, \\ \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + X\Psi_1 = -2\frac{d\Psi_0}{dx}, \\ \frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + X\Psi_2 = -2\frac{d\Psi_1}{dx} - \frac{p_1}{a+p}\Psi_0, \\ \frac{d^2\Psi_3}{dx^2} + X\Psi_3 = -2\frac{d\Psi_2}{dx} - \frac{p_1}{a+p}\Psi_1, \\ \frac{d^2\Psi_4}{dx^2} + X\Psi_4 = -2\frac{d\Psi_3}{dx} - \frac{p_1}{a+p}\Psi_2 + \frac{p_2}{(a+p)^2}\Psi_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

La forme de toutes ces équations est évidemment telle qu'on peut, selon la supposition, déterminer les diverses fonctions $\Psi_0, \Psi_1, \ldots$ sans avoir recours à des approximations. Cependant, la partie tout connue de chaque équation étant formée au moyen des fonctions précédentes, on ne saurait parvenir aux intégrales demandées que de proche en proche. Par ce fait, la marche à suivre pour obtenir ces diverses fonctions est indiquée. Mais il faut qu'on fasse encore une observation.

L'intégration d'une équation quelconque du système (10) introduit, dans l'intégrale, deux arbitraires: ces constantes étant, en effet, surabondantes, on les déterminera de façon que l'expression de l'intégrale soit exempte de termes contenant la variable indépendante hors des signes trigonométriques. Mais puisque, avec ces constantes seules, on ne saurait éviter tout terme de la nature mentionnée, on a introduit une suite d'autres constantes, à savoir $p_1, p_2, \ldots$ qu'on va choisir de manière à atteindre le but proposé.

5. Supposons qu'on ait trouvé, par l'intégration de la première des équations (10), l'expression

$$\Psi_0 = c_1 f_1(x) + c_2[hxf_1(x) + f_2(x)],$$

c_1 et c_2 étant les deux arbitraires, et h une constante tellement choisie que l'équation

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = 1$$

subsiste, dans laquelle on a désigné par y_1 et y_2 les deux intégrales particulières de l'équation proposée, de sorte qu'on ait:

$$y_1 = f_1(x), \qquad y_2 = hxf_1(x) + f_2(x).$$

Avec ces valeurs, la condition établie s'exprime de la manière suivante:

$$f_2(x) \frac{df_1(x)}{dx} - f_1(x) \frac{df_2(x)}{dx} - h(f_1(x))^2 = -1,$$

ou bien, si l'on admet la notation

$$f_2(x) = \varphi(x) f_1(x),$$

ainsi:

$$h = \frac{1}{(f_1(x))^2} - \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

En substituant, dans la formule (16) du § 2, l'expression précédente de h, il est facile de parvenir au résultat que voici:

$$(11) \qquad y = c_1 f_1(x) + c_2 f_1(x)[hx + \varphi(x)] + f_1(x) \int \frac{dx}{(f_1(x))^2} \int f_1(x) W dx,$$

formule qui peut devenir d'un usage très fréquent.

Maintenant, si nous désignons par W_n les divers membres de droite des équations (9), on aura:

$$\psi_n = c_1^{(n)} f_1(x) + c_2^{(n)} f_1(x)[hx + \varphi(x)] + f_1(x) \int \frac{dx}{(f_1(x))^2} \int f_1(x) W_n dx.$$

Evidemment, les constantes p_n entrant dans les expressions des divers W doivent être déterminées de manière à débarrasser les produits $f_1(x) W_n$ de tout terme constant: par le choix convenable des constantes $c_1^{(n)}$ et $c_2^{(n)}$, on pourra ensuite faire disparaître, dans la formule précédente, le terme constant ainsi que celui qui est formé par une constante multipliée par x. Seulement, si n est égal à zéro — cas dans lequel on doit, tout d'abord, annuler la constante $c_2^{(0)}$ — l'autre constante, à savoir $c_1^{(0)}$, peut être choisie à volonté. En effet, ayant attribué à la constante $c_1^{(0)}$ une valeur quelconque, cela n'exerce qu'une modification des arbitraires introduites par l'intégration de l'équation (9). Egalons donc, dès le début, la constante $c_1^{(0)}$ à l'unité, ce qui donne:

$$\Psi_0 = f_1(x).$$

Ayant ainsi déterminé les fonctions Ψ_n, admettons la notation

$$\alpha + p = -\nu^2,$$

et nous aurons, en intégrant l'équation (9),

$$z = C_1 e^{\nu x} + C_2 e^{-\nu x},$$

C_1 et C_2 étant les deux constantes effectivement arbitraires.

Maintenant, si nous nous rappelons le développement supposé de y, il sera facile de parvenir au résultat que voici:

$$(12) \qquad \begin{aligned} y = {} & C_1\{\Psi_0 + \nu\Psi_1 + \nu^2\Psi_2 + \ldots\}e^{\nu x} \\ & + C_2\{\Psi_0 - \nu\Psi_1 + \nu^2\Psi_2 - \ldots\}e^{-\nu x}. \end{aligned}$$

En admettant les notations

$$(13) \qquad \begin{cases} P = \Psi_0 + \nu^2\Psi_2 + \nu^4\Psi_4 + \ldots \\ Q = \Psi_1 + \nu^2\Psi_3 + \nu^4\Psi_5 + \ldots, \end{cases}$$

la formule précédente s'écrit ainsi:

$$(12') \qquad y = C_1(P + \nu Q)e^{\nu x} + C_2(P - \nu Q)e^{-\nu x};$$

et, si nous posons:

$$y_1 = \beta_1(P + \nu Q)e^{\nu x}; \qquad y_2 = \beta_2(P - \nu Q)e^{-\nu x},$$

β_1 et β_2 étant deux constantes que nous allons déterminer de manière à avoir:

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = 1,$$

nous aurons les termes à ajouter à la formule (12'), afin qu'elle donne l'intégrale de l'équation complète

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha + X)y = W, \tag{7'}$$

au moyen de l'expression

$$\begin{aligned} &- \beta_1\beta_2(P + \nu Q)e^{\nu x}\int W(P - \nu Q)e^{-\nu x}dx \\ &+ \beta_1\beta_2(P - \nu Q)e^{-\nu x}\int W(P + \nu Q)e^{\nu x}dx. \end{aligned} \tag{14}$$

Pour arriver à une relation d'où s'obtient le produit $\beta_1\beta_2$ — car nous n'avons aucun moyen immédiat pour séparer les deux facteurs — voici un procédé.

En introduisant, dans l'équation

$$\frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} = \frac{1}{y_1^2},$$

les valeurs de y_1 et de y_2, il viendra:

$$\frac{d\left(\frac{P - \nu Q}{P + \nu Q}e^{-2\nu x}\right)}{dx} = \frac{1}{\beta_1\beta_2}\frac{e^{-2\nu x}}{(P + \nu Q)^2};$$

on tire de là, après avoir effectué la différentiation,

$$2\nu\beta_1\beta_2\left\{P^2 - \nu^2Q^2 - Q\frac{dP}{dx} + P\frac{dQ}{dx}\right\} = -1. \tag{15}$$

Par cette relation, il sera visible que, si l'on y introduit les valeurs de P et Q qu'on va trouver prochainement, le produit $\beta_1\beta_2$ soit égal à $-\frac{1}{2\nu}$.

En supposant que W, P et Q soient donnés au moyen d'expressions ne contenant que des termes périodiques ou des constantes, on se convaincra que chaque diviseur introduit par le procès d'intégration, prendra la forme

$$\sigma^2 + \nu^2,$$

σ étant le coefficient de x dans l'argument du terme dont il s'agit. Donc, si α renferme une fonction horistique des coefficients dans y_1, fonction qui entre aussi dans l'expression de ν^2, et que W, P et Q soient donnés au moyen de séries, convergeant comme des progressions géométriques, le résultat qu'on obtient, en effectuant le calcul d'après la formule (14), sera aussi convergent.

6. Ayant établi les expressions de y_1 et de y_2 au moyen des fonctions P et Q, on pourrait se proposer de déterminer, d'une manière directe, ces fonctions sans passer par les fonctions $\Psi_0, \Psi_1, \ldots.$ Si dans ce but, on introduit, dans l'équation (7), après y avoir écrit X au lieu de $\alpha + X$, l'expression de y_1 ou bien celle de y_2, il sera aisé d'en tirer une nouvelle équation qui se divise immédiatement en deux autres, pourvu qu'on égale séparément à zéro les termes dépendant des puissances paires de ν, ainsi que ceux qui contiennent comme facteur une puissance impaire de cette quantité. Ces deux équations, les voici:

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2P}{dx^2} + 2\nu^2\dfrac{dQ}{dx} + (X + \nu^2)P = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2Q}{dx^2} + \quad 2\dfrac{dP}{dx} + (X + \nu^2)Q = 0. \end{cases}$$

Le système des deux équations linéaires que nous venons de déduire, se remplace facilement par une seule équation du deuxième ordre qui, toutefois, n'est plus linéaire. En effet, si nous posons:

$$P + \nu Q = (1 + \psi)e^{\nu\int\frac{dx}{(1+\psi)^2} - \nu x},$$

$$P - \nu Q = (1 + \psi)e^{-\nu\int\frac{dx}{(1+\psi)^2} + \nu x},$$

toutes les deux équations (16) seront satisfaites par la valeur de ψ qui résulte en intégrant l'équation

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\nu^2}{(1+\psi)^3} + X(1+\psi) = 0. \tag{17}$$

Nous reviendrons plus tard à cette équation qui, si on la développe suivant les puissances de ψ, renfermera des termes horistiques, et qui en conséquence admet une solution uniformément convergente.

Mais, en procédant ainsi, on trouverait les fonctions P et Q affectées des exponentielles, réelles ou imaginaires, vu que les puissances paires de ψ renferment nécessairement des termes constants. Bien que l'inconvénient qui en résulte ne soit pas, en effet, très grave, cherchons néanmoins à déterminer, s'il est possible, les P et Q autrement, mais de manière à ne contenir, outre un terme constant, que des termes trigonométriques dépendant des arguments qui se trouvent déjà dans la fonction X, ainsi que leurs multiples.

Il ne s'agit toutefois que d'une solution particulière du système (16) laquelle s'obtient quelquefois très aisément au moyen d'approximations.

Posons dans l'équation (7), en écrivant toujours X au lieu de $\alpha + X$,

$$y = (1+\varphi)e^{\nu x + \int z dx}, \tag{18}$$

où l'on a désigné par φ et z deux nouvelles fonctions que nous allons déterminer de façon à remplir certaines conditions. On obtient de la sorte l'équation

$$\frac{1}{1+\varphi}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2(\nu+z)}{1+\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \nu^2 + 2\nu z + z^2 + \frac{dz}{dx} + X = 0. \tag{19}$$

Or, puisqu'une des fonctions φ et z est entièrement arbitraire, on pourrait établir la condition

$$z = \frac{\nu}{(1+\varphi)^2} - \nu,$$

ce qui nous amènerait à l'équation (17) de sorte que φ fût égal à ψ; mais cherchons d'autres modes pour déterminer les deux fonctions φ et z.

D'abord, si l'on exprime ces deux fonctions au moyen d'une troisième, en admettant les relations

$$1 + \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta}},$$

$$z = \nu\eta,$$

φ est encore égal à ψ, et il sera facile d'obtenir l'équation que voici:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{1 + \eta}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 - 2\nu^2(1 + \eta)^3 - 2X(1 + \eta) = 0, \tag{20}$$

résultat qui n'est au fond qu'une simple transformation de l'équation (17).

Evidemment, après avoir développé, suivant les puissances de η, l'équation que nous venons de trouver, elle renfermera des termes horistiques, et on en pourrait, par conséquent, tirer une solution uniformément convergente. En déterminant, en même temps, la constante ν de manière que la fonction η ne contienne aucun terme constant, nous aurons les fonctions P et Q exprimées au moyen des formules

$$P + \nu Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta}} e^{\nu\int \eta dx},$$

$$P - \nu Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta}} e^{-\nu\int \eta dx},$$

qui permettent de déterminer les deux fonctions dont il s'agit de façon qu'elles ne dépendent que des arguments qui figurent dans η ou bien déjà dans X. Donc, si l'on suppose que la fonction X ne contienne, outre un terme constant, que des termes périodiques, il sera toujours possible de parvenir, après avoir obtenu une solution particulière de l'équation (20), à l'intégrale générale de l'équation (7).

Mais on pourra aussi opérer la détermination des deux fonctions φ et z de la manière suivante.

Si l'on établit l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - l^2\varphi = -X + l^2 - \varphi X, \tag{21}$$

l^2 étant une constante encore à notre disposition, il restera, pour déterminer la fonction z, celle-ci:

$$(22)\qquad \frac{dz}{dx} + 2\left(\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{1+\varphi} + \nu\right)z + \frac{2\nu\frac{d\varphi}{dx}}{1+\varphi} + \nu^2 + l^2 + z^2 = 0;$$

et on en conclut la formule suivante:

$$z = -\frac{e^{-2\nu x}}{(1+\varphi)^2}\int^x_{\circ} (1+\varphi)^2 e^{2\nu x}\left|\frac{2\nu\frac{d\varphi}{dx}}{1+\varphi} + \nu^2 + l^2 + z^2\right| dx,$$

qui sert à calculer z de proche en proche.

En considérant la relation

$$\int (1+\varphi)\frac{d\varphi}{dx} e^{2\nu x} dx = \left(\frac{1}{2}(1+\varphi)^2 - c\right)e^{2\nu x} - 2\nu\int\left(\frac{1}{2}(1+\varphi)^2 - c\right)e^{2\nu x} dx,$$

où l'on a désigné par c une constante surabondante qu'il faut déterminer de manière à avoir le facteur

$$\frac{1}{2}(1+\varphi)^2 - c$$

exempt du terme constant, l'expression précédente de z se transforme aisément en celle-ci:

$$(23)\qquad z = -2\nu\left(\frac{1}{2} - \frac{c}{(1+\varphi)^2}\right)$$
$$-\frac{e^{-2\nu x}}{(1+\varphi)^2}\int^x_{\circ}\left|(\nu^2 + l^2 + z^2)(1+\varphi)^2 - 4\nu^2\left(\frac{1}{2}(1+\varphi)^2 - c\right)\right| e^{2\nu x} dx.$$

Mais avant d'aller plus loin, cherchons à déterminer la fonction φ par intégration de l'équation (21).

7. Supposons qu'on ait:

$$X = a_0 + a_1 \cos H_1 + a_2 \cos H_2 + \ldots + a_n \cos H_n,$$

les $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des coefficients positifs, et les arguments H_n, donnés au moyen de la formule générale

$$H_n = \sigma_n x + b_n.$$

Ensuite, posons:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots$$

et déterminons la fonction φ_0 au moyen de l'équation

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} - l^2\varphi_0 = - X + a_0.$$

Il s'ensuivra:

$$\varphi_0 = \frac{a_1}{\sigma_1^2 + l^2}\cos H_1 + \frac{a_2}{\sigma_2^2 + l^2}\cos H_2 + \ldots + \frac{a_n}{\sigma_n^2 + l^2}\cos H_n.$$

Maintenant, en formant le produit $\varphi_0 X$, et en ne considérant que la partie constante y contenue, la condition que le second membre de l'équation (21) soit dépourvu du terme constant, s'établit immédiatement, tant qu'elle est indépendante des termes qu'on va obtenir dans les approximations suivantes. La condition dont nous parlons s'exprime au moyen de la relation

$$\text{(a)} \qquad l^2 = a_0 + \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{\sigma_1^2 + l^2} + \frac{1}{2}\frac{a_2^2}{\sigma_2^2 + l^2} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{a_n^2}{\sigma_n^2 + l^2}.$$

Evidemment, si la valeur de a_0 est positive, l'équation que nous venons d'établir, admet toujours une racine réelle et positive.

Mais, si, au contraire, a_0 a une valeur négative, distinguons alors deux cas: l'un où l'on a:

$$- a_0 + \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2}\frac{a_2^2}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{a_n^2}{\sigma_n^2} > 0,$$

et l'autre où l'inégalité

$$- a_0 + \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2}\frac{a_2^2}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{a_n^2}{\sigma_n^2} < 0$$

subsiste.

Dans le premier cas, il y a évidemment une valeur de l^2, entre 0 et $+\infty$, qui satisfait l'équation (a): en effet, la somme

$$- l^2 - a_0 + \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{\sigma_1^2 + l^2} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{a_n^2}{\sigma_n^2 + l^2},$$

qui, selon l'hypothèse, est positive, si l^2 est disparu, reste toujours con-

tinue, autant que l^2 est positif, et prend une valeur négative lorsque l^2 acquiert une valeur suffisamment grande.

Dans le second cas, écrivons $-l^2$ au lieu de l^2, et désignons par σ la plus petite des quantités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$. Or, la valeur de

$$l^2 - a_0 + \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{\sigma_1^2 - l^2} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{a_n^2}{\sigma_n^2 - l^2}$$

étant négative, si l^2 est égal à zéro, et continue, l^2 ayant une valeur entre o et σ^2, nous en concluons qu'il y a une valeur de l^2, entre o et σ^2, satisfaisant l'équation (a), mais il en peut aussi résulter une racine, à peu près égale à a_0. L'équation dont il s'agit a donc toujours au moins une racine réelle, qui peut aussi être considérée comme une petite quantité, pourvu que les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ ainsi que les $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ aient de petites valeurs.

Après avoir ainsi déterminé une valeur approchée de l^2 et en conséquence trouvé une expression approchée de φ_0, passons aux approximations suivantes. On aura d'abord la fonction φ_1 en intégrant l'équation

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - l^2\varphi_1 = l^2 - \varphi_0 X.$$

Dans le courant des approximations successives, il y a lieu de faire une remarque importante. En établissant le produit $\varphi_1 X$, il en pourra déjà résulter une partie constante qui se rejoint à l'équation (a), et qui, par conséquent, tend à modifier un peu le résultat qu'on venait de trouver dès le début. Cela arrive toutes les fois que quelques-uns des arguments H_n sont des multiples de quelques-uns des autres H_n. Mais en continuant les approximations par la voie indiquée, on retrouvera, du moins dans l'expression de φ_2, et dans celles des fonctions suivantes, les arguments d'où dépendent les termes de la fonction φ_0. Il s'ensuit que les approximations consécutives nécessitent des incréments à ajouter au résultat qu'on a obtenu d'abord relativement à l^2. Que ces incréments tendent à augmenter la valeur positive de l^2, ou bien à diminuer sa valeur négative, cela se comprend par le fait que tous les nouveaux termes entrant dans la fonction φ sont positifs, pourvu qu'on y fasse l^2 égal à zéro. De cette circonstance, on conclut aussi la convergence des approximations successives, d'où découle immédiatement celle

du résultat final, vu que chaque approximation ne donne qu'un nombre fini de termes. En effet, plus la valeur positive de l^2 est sensible, moins s'agrandit φ par le procès d'intégration: et puisque les approximations successives tendent à agrandir la valeur positive de l^2, on finira par avoir le rapport $\frac{X_n}{l^2}$, — X_n étant égal à $l^2 - \varphi_{n-1}X$, moindre que l'unité. A partir de là, les résultats des approximations consécutives diminuent en raison hypergéometrique. Rien n'empêche cependant que le résultat ne converge, la valeur de l^2 étant négative; seulement, on ne saurait, d'une manière aisée, mettre cette convergence en lumière sans avoir recours aux valeurs spéciales des constantes entrant dans la fonction X.

Ayant ainsi obtenu le résultat que la fonction φ s'exprime au moyen d'une série trigonométrique, uniformément convergente et exempte du terme constant, revenons à la formule (23).

8. Si nous désignons par $h_2, h_4, \ldots$ les parties constantes de $\varphi^2, \varphi^4, \ldots$, et que nous ne considérions que la partie exempte du signe $\int$, nous aurons tout de suite l'équation de condition que voici:

$$\frac{1}{2} - c(1 + 3h_2 + 5h_4 + \ldots) = 0,$$

d'où s'obtient la valeur

$$c = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}h_2 \pm \ldots;$$

ensuite, après avoir admis le développement

$$z = z_0 + z_1 + \ldots,$$

on peut établir l'expression suivante, qui donne approximativement la fonction z,

$$z_0 = -2\nu\varphi.$$

Cependant, la structure algébrique des résultats qu'on pourrait obtenir en étendant plus loin l'application de l'équation (23), devenant fort compliquée, je préfère l'emploi de l'équation (22) comme base des recherches sur la fonction z. En mettant dans la dite équation,

$$z = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{1 + \varphi} + \zeta,$$

nous aurons immédiatement:

$$\frac{d\zeta}{dx} + 2\nu\zeta + \zeta^2 + \nu^2 + l^2 - \frac{\frac{d^2\varphi}{dx^2}}{1 + \varphi} = 0,$$

ou bien, en vertu de l'équation (21), celle-ci:

$$\frac{d\zeta}{dx} + 2\nu\zeta + \zeta^2 + \nu^2 + X = 0. \tag{24}$$

Si nous remplaçons ζ par deux nouvelles fonctions, U et V, de manière à avoir:

$$\zeta = U + \nu V,$$

nous pouvons les déterminer de façon que chacune d'elles ne dépende que des puissances paires de ν. De la sorte, si ν était imaginaire, les deux fonctions dont il s'agit deviendraient néanmoins réelles.

Par la condition admise, l'équation en ζ se divise dans les deux suivantes:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dx} + 2\nu^2 V + U^2 + \nu^2 V^2 + \nu^2 + X = 0, \\ \dfrac{dV}{dx} + 2U + 2UV = 0, \end{cases} \tag{25}$$

d'où l'on tire, en différentiant la première, et en remplaçant les premières dérivées de U et de V par leurs valeurs tirées de ces équations elles-mêmes, le résultat

$$\frac{d^2U}{dx^2} - 2XU - 2U^3 - 6\nu^2 U(1 + V)^2 = -\frac{dX}{dx}. \tag{26}$$

Mais la première des équations (25) nous donne:

$$\nu^2(1 + V)^2 = -\frac{dU}{dx} - U^2 - X,$$

de sorte que nous pouvons remplacer l'équation précédente par celle-ci:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + 4XU + 6U\frac{dU}{dx} + 4U^3 = -\frac{dX}{dx}. \tag{26'}$$

Cette équation du troisième degré se transforme aisément en une

équation linéaire du troisième ordre, du reste bien connue: en effet, si l'on introduit la fonction χ au moyen de la relation

$$U = \frac{1}{2}\frac{\frac{d\chi}{dx}}{1+\chi},$$

il résultera:

$$\frac{d^3\chi}{dx^3} + 4X\frac{d\chi}{dx} + 2(1+\chi)\frac{dX}{dx} = 0, \tag{27}$$

équation qui s'écrit aussi de la manière suivante:

$$(1+\chi)\frac{d^3\chi}{dx^3} + \frac{d\chi}{dx}\frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{d\chi}{dx}\frac{d^2\chi}{dx^2} + 4(1+\chi)\frac{d\chi}{dx}X + 2(1+\chi)^2\frac{dX}{dx} = 0.$$

On en tire immédiatement une intégrale, à savoir:

$$(1+\chi)\frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\chi}{dx}\right)^2 + 2(1+\chi)^2X = -2\gamma^2, \tag{27'}$$

$2\gamma^2$ étant l'arbitraire introduite par l'intégration.

Ayant trouvé la solution d'une des équations (26), (26'), (27) ou (27'), la difficulté principale de notre tâche est surmontée, vu que la fonction V, encore indéterminée, s'obtient au moyen de la formule très simple:

$$V = e^{-2\int U dx}(\text{const.} - e^{2\int U dx})$$
$$= \frac{\text{const.}}{1+\chi} - 1.$$

En introduisant cette valeur de V, ainsi que celle de U exprimée par χ, dans la première des équations (25), nous retrouverons tout facilement l'équation (27'), et il en résultera simultanément la valeur

$$\text{const.} = \frac{\gamma}{\nu}.$$

Mais, on pourrait aussi chercher la fonction V d'une manière directe. Dans ce but, nous tirons de la seconde des équations (25) la suivante

$$\frac{d^2V}{dx^2} + 2(1+V)\frac{dU}{dx} + 2U\frac{dV}{dx} = 0;$$

en introduisant dans la première des équations (25), au lieu de U, la valeur $-\frac{1}{2}\frac{\frac{dV}{dx}}{1+V}$, nous retrouvons l'équation (20), excepté que V aura pris la place de η. Nous en concluons l'égalité

$$\eta = V.$$

Egalement, il sera facile d'établir une relation simple entre la fonction χ et celle que nous avons désignée, un peu plus haut, par ψ. En effet, si nous admettons:

$$1 + \psi = \sqrt{1 + \chi},$$

on retrouvera l'équation (17), à condition toutefois qu'on ait:

$$\gamma = \nu.$$

Nous retomberons donc dans la formule déjà établie

$$V = \eta = \frac{1}{(1+\psi)^2} - 1.$$

Maintenant, puisqu'on a:

$$U = \frac{\frac{d\psi}{dx}}{1+\psi},$$

on arrivera immédiatement au résultat

$$z = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{1+\varphi} + \frac{\frac{d\psi}{dx}}{1+\psi} + \nu\eta,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\int z dx &= \nu\int \eta dx + \log\frac{1+\psi}{1+\varphi} \\ &= \nu\int \eta dx + \psi - \varphi - \frac{1}{2}(\psi^2 - \varphi^2) + \frac{1}{3}(\psi^3 - \varphi^3) + \dots .\end{aligned}$$

La différence $\psi - \varphi$ qui entre dans la formule signalée, s'obtient directement en vertu d'une équation différentielle du second ordre que nous allons déduire maintenant.

En supposant ψ moindre que l'unité, l'équation (17) s'écrit de la manière suivante:

$$(17') \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} + [X - 3\nu^2]\psi + 6\nu^2\psi^2 - 10\nu^2\psi^3 + \ldots = -X - \nu^2;$$

la différence entre cette équation et l'équation (21) nous donne immédiatement:

$$\frac{d^2(\psi - \varphi)}{dx^2} + [X - 3\nu^2](\psi - \varphi)$$
$$= -l^2 - \nu^2 + (3\nu^2 - l^2)\varphi - 6\nu^2\psi^2 + 10\nu^2\psi^3 + \ldots.$$

Mais puisqu'on a:

$$\psi = \psi - \varphi + \varphi; \qquad \psi^2 = (\psi - \varphi)^2 + 2\varphi(\psi - \varphi) + \varphi^2; \quad \ldots,$$

l'équation précédente se met sous la forme qui voici:

$$(28) \quad \frac{d^2(\psi - \varphi)}{dx^2} + [X - 3\nu^2 + 12\nu^2\varphi - 30\nu^2\varphi^2 + \ldots](\psi - \varphi)$$
$$+ 6\nu^2(\psi - \varphi)^2 - 10\nu^2(\psi - \varphi)^3 + \ldots$$
$$= -l^2 - \nu^2 + (3\nu^2 - l^2)\varphi - 6\nu^2\varphi^2 + \ldots.$$

Il est visible par là que la détermination de la différence $\psi - \varphi$ s'opère, à peu près, de la même manière que celle de la fonction ψ; l'introduction de la fonction φ paraît donc inutile. Néanmoins, si le second membre de l'équation (28) est très petit, la différence $\psi - \varphi$ deviendra aussi très petite, de sorte que les approximations conduisant à l'intégrale particulière de cette équation convergent rapidement: dans ce cas, l'emploi de ladite équation est à préférer à celui de l'équation (17), vu que la fonction φ s'obtient, par l'intégration de l'équation (21), d'une manière relativement facile.

9. A ce qui concerne l'intégration des diverses équations qui se sont présentées, l'une après l'autre, dans les n^{os} 6 et 8, il y a quelques observations à faire.

La plupart des équations dont j'ai parlé renfermant des termes horistiques, on saurait généralement en tirer une solution dont la convergence serait uniforme; cependant, ces termes pouvant s'annuler, certaines conditions étant satisfaites, il paraît nécessaire d'étudier séparément les diffé-

rents cas qui peuvent se présenter. Mais sans entrer dans le détail d'une analyse qui serait d'intérêt, plutôt pour la théorie des équations linéaires que pour les recherches sur les mouvements des planètes, je me borne à envisager le cas où la quantité ν^2 aura disparu ou du moins sera très petite, et encore à traiter l'intégration de l'équation (20).

La condition que ν^2 soit égal à zéro, s'exprime au moyen de la relation

$$-a_0 = \overset{0}{\mathrm{T}}(U^2),$$

a_0 étant toujours le terme constant dans l'expression de X. Ce résultat, s'obtenant sans calcul en vertu de l'équation (24), peut être vérifié au moyen de l'équation (20).

En effet, si l'on met dans cette équation ν égal à zéro, elle devient:

$$\frac{\frac{d^2\eta}{dx^2}}{1+\eta} - \frac{3}{2}\frac{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}{(1+\eta)^2} = 2X;$$

et si l'on y introduit:

$$\frac{\frac{d^2\eta}{dx^2}}{1+\eta} = -2\frac{dU}{dx} - 2U\frac{\frac{d\eta}{dx}}{1+\eta},$$

$$\frac{\frac{d\eta}{dx}}{1+\eta} = -2U,$$

la relation mentionnée sera retrouvée, vu que la dérivée $\frac{dU}{dx}$ ne peut contenir aucun terme constant.

Supposons maintenant qu'on ait ν exactement égal à zéro; l'équation (26) devient alors:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - 2XU - 2U^3 = -\frac{dX}{dx}, \tag{26''}$$

dont le terme horistique $-2U^3$ ne disparaît aucunement.

Admettons le développement

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots,$$

et désignons par g une constante que nous supposons également donnée au moyen d'un développement, à savoir:

$$g = g_{1.0} + g_{2.0} + g_{2.1} + g_{3.0} + g_{3.1} + g_{3.2} + \dots.$$

Cela étant, nous allons déterminer les divers U au moyen des équations suivantes:

$$\frac{d^2U_0}{dx^2} - (2a_0 + g)U_0 = -\frac{dX}{dx},$$

$$\frac{d^2U_1}{dx^2} - (2a_0 + g)U_1 = 2(X - a_0)U_0 + 2U_0^3 - g_{1.0}U_0,$$

$$\frac{d^2U_2}{dx^2} - (2a_0 + g)U_2 = 2(X - a_0)U_1 + 6U_0^2U_1 + 6U_0U_1^2 + 2U_1^3 - g_{1.0}U_1 - g_{2.0}U_0 - g_{2.1}U_1,$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2U_3}{dx^2} - (2a_0 + g)U_3 = {} & 2(X - a_0)U_2 + 6(U_0^2 + U_1^2)U_2 + 2U_2^3 \\ & + 6U_2^2(U_0 + U_1) + 12U_0U_1U_2 \\ & - g_{2.1}U_0 - g_{2.0}U_1 - (g_{1.0} + g_{2.0} + g_{2.1})U_2 \\ & - g_{3.0}U_0 - g_{3.1}U_1 - g_{3.2}U_2\end{aligned}$$

etc.

Evidemment, les divers g sont introduits afin de rendre les seconds membres des équations établies si petits que possible, mais il ne sera aucunement nécessaire en remplir exactement cette condition. Les g, pouvant ainsi être choisis en quelque sorte à volonté, on peut les déterminer de manière qu'ils soient toujours positifs. En désignant par $h_2^{(0)}$ la partie constante de U_0^2, par $h_2^{(1)}$ la partie constante de U_1^2, et ainsi de suite, puis, par $f_{1.0}, f_{2.0}, f_{2.1}, \dots$ des constantes positives, on pourra établir les formules:

$$g_{1.0} = f_{1.0}h_2^{(0)},$$

$$g_{2.0} = f_{2.0}h_2^{(1)}; \qquad g_{2.1} = f_{2.1}h_2^{(1)},$$

$$g_{3.0} = f_{3.0}h_2^{(2)}; \qquad g_{3.1} = f_{3.1}h_2^{(2)}; \qquad g_{3.2} = f_{3.2}h_2^{(2)}$$

etc.;

et, après avoir introduit ces expressions dans les équations ci-dessus, il sera facile de choisir les valeurs les plus convenables des constantes f, choix, qui en effet doit être dirigé selon les données numériques de l'équation proposée.

Cela fait, on parvient à l'équation

$$(30) \qquad g = \sum \frac{N_m}{(\sigma_m^2 + 2a_0 + g)^2} + \sum \frac{N_{n.m}}{(\sigma_m^2 + 2a_0 + g)(\sigma_n^2 + 2a_0 + g)} + \ldots,$$

où l'on a désigné par $N_m, N_{m.n}, \ldots$ des coefficients positifs constituant une série dont la convergence est celle d'une progression géométrique. De cette équation, il résultera nécessairement une valeur positive de g, ce qui entraîne la convergence de la série

$$U_0 + U_1 + \ldots$$

laquelle, en effet, peut être très rapide si g acquiert une valeur considérable.

En supposant que la fonction U soit finalement exprimée par la série

$$U = \lambda_1 \sin H_1 + \lambda_2 \sin H_2 + \ldots,$$

les λ étant des coefficients constants, et les H_1 des arguments dont une partie se trouvent déjà dans la fonction X, on aura la condition

$$(31) \qquad -a_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots)$$

qui doit être satisfaite, pour avoir le coefficient ν égal à zéro. Il y aurait donc, si ν^2 n'était pas exactement égal à zéro, deux équations, à savoir les équations (30) et (31), qu'il faudrait résoudre simultanément, si l'on voulait en même temps trouver l'intégrale générale de l'équation (26'') et déterminer la valeur de la constante α entrant dans l'équation (7).

Dans le cas envisagé dernièrement, c'est à dire, si ν^2 avait une valeur très petite mais différente de zéro, on pourrait intégrer l'équation (26) au moyen d'approximations successives, mais on trouverait aussi l'intégrale cherchée en utilisant la méthode que nous avons présentée dans le n° 4 du paragraphe présent.

10. Considérons encore l'équation (20) qui paraît s'accommoder le mieux à la détermination de la constante ν^2.

En développant suivant les puissances de η, on peut d'abord s'arrêter à l'équation que voici:

$$(32)\qquad \frac{d^2\eta}{dx^2}-\left[2X-\frac{3}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2+6\nu^2\right]\eta = 2X+2\nu^2+\frac{3}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2,$$

où il s'agit de déterminer la constante ν^2 de manière que la fonction η ne renferme que des termes périodiques.

Supposons, comme dans les numéros précédents, qu'on ait:

$$X = a_0 + a_1 \cos H_1 + a_2 \cos H_2 + \ldots,$$

et désignons par $-e^2$ la partie constante de $2X-\frac{3}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2+6\nu^2$, de sorte que e^2 soit donné au moyen de l'expression

$$e^2 = -2a_0 - 6\nu^2 + \frac{3}{2}\overset{\circ}{\mathrm{T}}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2.$$

Cela étant, admettons le développement

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 + \ldots,$$

et remplaçons l'équation posée par le système

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\eta_0}{dx^2} + e^2\eta_0 = 2(X-a_0), \\[2ex] \dfrac{d^2\eta_1}{dx^2} + e^2\eta_1 = 2X\eta_0 - 2\overset{\circ}{\mathrm{T}}(X\eta_0), \\[2ex] \text{etc.}; \end{cases}$$

évidemment, la constante ν^2 doit satisfaire à la condition

$$0 = 2a_0 + 2\nu^2 + \frac{3}{2}\overset{\circ}{\mathrm{T}}\left(\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right) + 2\overset{\circ}{\mathrm{T}}(\eta X) + \ldots,$$

de sorte que cette constante ne figure plus dans le système signalé.

De l'expression précédente de e^2, on tire maintenant celle-ci:

$$e^2 = 4a_0 + 6\overset{\circ}{\mathrm{T}}\left(\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right) + 6\overset{\circ}{\mathrm{T}}(\eta X) + \ldots,$$

où il faut, pour avoir une valeur préalable de e^2, introduire, au lieu de η, sa valeur approchée η_0.

L'intégration de la première des équations (33) nous donne tout de suite:

$$\eta_0 = -\frac{2a_1}{\sigma_1^2 - e^2}\cos H_1 - \frac{2a_2}{\sigma_2^2 - e^2}\cos H_2 - \ldots,$$

d'où s'obtient:

$$\overset{0}{\mathrm{T}}\left(\left(\frac{d\eta_0}{dx}\right)^2\right) = \frac{2a_1^2\sigma_1^2}{(\sigma_1^2 - e^2)^2} + \frac{2a_2^2\sigma_2^2}{(\sigma_2^2 - e^2)^2} + \ldots,$$

$$\overset{0}{\mathrm{T}}(\eta_0 X) = -\frac{a_1^2}{\sigma_1^2 - e^2} - \frac{a_2^2}{\sigma_2^2 - e^2} - \ldots.$$

Avec ces valeurs, on trouve immédiatement l'équation

$$e^2 = 4a_0 + 6\left\{\frac{a_1^2(\sigma_1^2 + e^2)}{(\sigma_1^2 - e^2)^2} + \frac{a_2^2(\sigma_2^2 + e^2)}{(\sigma_2^2 - e^2)^2} + \ldots\right\}, \tag{34}$$

d'où il résulte toujours une valeur réelle de e^2.

Ayant déterminé la valeur de e^2, celle de ν^2 en découle facilement, vu qu'on a:

$$6\nu^2 = -e^2 - 2a_0 + 3\left\{\frac{a_1^2\sigma_1^2}{(\sigma_1^2 - e^2)^2} + \frac{a_2^2\sigma_2^2}{(\sigma_2^2 - e^2)^2} + \ldots\right\},$$

expression qui se remplace facilement par la suivante:

$$\nu^2 = -a_0 - \frac{1}{2}\left\{\frac{a_1^2(\sigma_1^2 + 2e^2)}{(\sigma_1^2 - e^2)^2} + \frac{a_2^2(\sigma_2^2 + 2e^2)}{(\sigma_2^2 - e^2)^2} + \ldots\right\}. \tag{35}$$

On voit par là que ν^2 est négatif toutes les fois que a_0 garde une valeur positive, mais que, si a_0 est négatif, ν^2 peut passer par zéro et même devenir positif. Et encore, bien que e^2 soit une fonction de a_0, ce qui est d'abord visible del'équation (34), cette dernière quantité entre dans l'expression de ν^2 principalement comme terme additif sans être multiplié par aucun autre facteur que l'unité. En conséquence, si l'on va chercher la solution de l'équation (7'), à savoir de celle-ci:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Xy = W,$$

une fonction horistique se trouvant dans a_0 entrera comme terme additif dans les dénominateurs des divers termes dont la somme constitue la fonction y.

En continuant les approximations que nécessite l'intégration de l'équation (20), on se convaincra facilement, soit de la convergence des approximations successives, soit de celle des séries trigonométriques, par lesquelles sont représentés les résultats obtenus dans les diverses approximations.

En effet, les conditions rigoureuses qu'il faut remplir étant celles-ci:

$$e^2 = -2a_0 - 6\nu^2 + \frac{3}{2}\overset{0}{\mathrm{T}}\left(\frac{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}{1-\eta^2}\right) - 2\nu^2\overset{0}{\mathrm{T}}(\eta^2),$$

$$0 = \quad 2a_0 + 2\nu^2 + \frac{3}{2}\overset{0}{\mathrm{T}}\left(\frac{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}{1-\eta^2}\right) + 6\nu^2\overset{0}{\mathrm{T}}(\eta^2)$$

$$+ 2\overset{0}{\mathrm{T}}(\eta X) - \frac{3}{2}\overset{0}{\mathrm{T}}\left(\frac{\eta\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}{1-\eta^2}\right) - 2\nu^2\overset{0}{\mathrm{T}}(\eta^3),$$

il est immédiatement visible que la valeur de la fonction η ne peut se rapprocher trop de l'unité, vu qu'autrement la valeur de e^2 deviendrait très grande, ce qui rendrait, à son tour, les coefficients x et, en conséquence, toute la fonction η assez petite. S'étant ainsi assuré que les résultats des diverses approximations ne peuvent pas différer beaucoup l'un de l'autre, on ne doutera pas qu'on ne parvienne finalement à un résultat définitif. Néanmoins, les premières approximations pouvant, dans un cas critique, s'écarter plus du résultat vrai qu'il n'était désirable, on pourrait, dans un tel cas, pousser la convergence des approximations successives au moyen de certains artifices de calcul, dont je ne tiens pas, cependant, nécessaire de faire mention ici.

Mais examinons encore la convergence du résultat qu'on obtient dans une certaine approximation.

Dans ce but, écrivons d'abord l'équation (20) ainsi:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + e^2\eta = -N,$$

où l'on a désigné par N une somme de termes trigonométriques dont les coefficients sont déterminés en vertu des approximations précédentes. N'en mettons en évidence que les parties principales. Les voici:

$$-N = 2X + 2\eta X - \frac{3}{2}\eta\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + 6\nu^2\eta^2 + \ldots + \text{ partie const.}$$

En substituant, dans cette expression, la valeur de η qu'on a déjà trouvée il en résultera un développement de la forme suivante

$$\begin{aligned} N = & N_1 \cos H_1 + N_2 \cos H_2 + \ldots \\ & + N_{1.1} \cos 2H_1 + N_{2.2} \cos 2H_2 + \ldots \\ & + \ldots \\ & + N_{1.2} \cos(H_1 + H_2) + N_{1.-2} \cos(H_1 - H_2) + \ldots \\ & + \ldots . \end{aligned}$$

Cela posé, la fonction η s'exprime au moyen du développement

$$\begin{aligned} \eta = & \varkappa_1 \cos H_1 + \varkappa_2 \cos H_2 + \ldots \\ & + \varkappa_{1.1} \cos 2H_1 + \varkappa_{2.2} \cos 2H_2 + \ldots \\ & + \ldots \\ & + \varkappa_{1.2} \cos(H_1 + H_2) + \varkappa_{1.-2} \cos(H_1 - H_2) + \ldots \\ & + \ldots , \end{aligned} \tag{36}$$

où les coefficients sont des quantités qu'on obtient au moyen des formules

$$\varkappa_n = \frac{N_n}{\sigma_n^2 - e^2},$$

$$\varkappa_{m.n} = \frac{N_{m.n}}{(\sigma_m + \sigma_n)^2 - e^2}; \qquad \varkappa_{m.-n} = \frac{N_{m.-n}}{(\sigma_m - \sigma_n)^2 - e^2}.$$

L'équation qui sert à déterminer e^2 est maintenant, à ne tenir compte que des termes du deuxième degré, celle-ci:

$$\begin{aligned} e^2 = 4a_0 + 3\{ &\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \dots \\ &+ 4\sigma_1^2 x_{1.1}^2 + 4\sigma_2^2 x_{2.2}^2 + \dots \\ &+ \dots \\ &+ (\sigma_1 + \sigma_2)^2 x_{1.2}^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 x_{1.-2}^2 + \dots \\ &+ \dots \} \\ + 3\{&a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots\}. \end{aligned}$$

Généralement, la quantité e^2 est sensiblement différente de zéro: si elle est négative, la convergence du développement (36) est immédiatement visible; ne considérons donc que le cas où e^2 est positif. Admettons encore que, si l'on pose:

$$e^2 = 3a_n x_n + 3\sigma_n^2 x_n^2 + M_n, \tag{37}$$

la somme des termes indépendants de x_n, que nous avons désignée par M_n soit une quantité positive.

Cela étant, l'expression par laquelle est donné le coefficient x_n, devient:

$$x_n = \frac{N_n}{\sigma_n^2 - 3a_n x_n - 3\sigma_n^2 x_n^2 - M_n},$$

d'où l'on tire l'équation du troisième degré que voici:

$$3\sigma_n^2 x_n^3 + 3a_n x_n^2 - (\sigma_n^2 - M_n) x_n = - N_n. \tag{38}$$

Qu'on distingue maintenant deux groupes de termes dans l'expression (36): au premier groupe appartiennent ceux dont les arguments se trouvent déjà dans la fonction X; les termes du second genre dépendent, au contraire, d'arguments qui apparaissent en vertu des opérations exécutées pour arriver à l'expression mentionnée. Les termes du premier groupe sont marqués par un seul indice, ceux du second groupe, par deux.

Considérons d'abord un terme du second genre.

En formant l'expression du type (37), le terme dépendant de a_n y

manquera évidemment; et le terme analogue manquera également dans l'équation (38), de sorte que nous avons:

$$3\sigma_{m.n}^2 x_{m.n}^2 - (\sigma_{m.n}^2 - M_{m.n}) x_{m.n} = - N_{m.n}.$$

De cette équation, il est facile de voir que les $x_{m.n}$ forment nécessairement une série convergente, pourvu que les $N_{m.n}$ en forment une: car si $\sigma_{m.n}^2$ était une quantité fort petite, l'expression approchée de $x_{m.n}$ deviendrait:

$$x_{m.n} = -\frac{N_{m.n}}{M_{m.n}};$$

et puisque les différentes $M_{m.n}$ ne diffèrent guère, m et n étant de grands nombres, l'un de l'autre, la convergence des $x_{m.n}$ est presque la même que celle des $N_{m.n}$; ensuite, si $\sigma_{m.n}^2$ était égal à $M_{m.n}$, ne fût ce même qu'approximativement, on aurait à peu près:

$$x_{m.n} = -\sqrt[3]{\frac{N_{m.n}}{3M_{m.n}}},$$

formule qui montre que les $x_{m.n}$ convergent comme les racines cubiques des $N_{m.n}$.

Venons maintenant aux termes du premier genre.

Si l'on remplace, dans l'équation (37), a_n par la valeur

$$\frac{a_n}{N_n}\frac{N_n}{\sigma_n^2 - e^2}(\sigma_n^2 - e^2) = f_n x_n (\sigma_n^2 - e^2),$$

où l'on a écrit, pour abréger, f_n au lieu de $-\frac{a_n}{N_n}$, il viendra:

$$e^2 = 3f_n x_n^2 (\sigma_n^2 - e^2) + 3\sigma_n^2 x_n^2 + M_n.$$

On tire de là:

$$e^2 = \frac{3f_n \sigma_n^2 x_n^2 + 3\sigma_n^2 x_n^2 + M_n}{1 + 3f_n x_n^2};$$

et ensuite, par l'introduction de cette valeur dans la formule

$$x_n = \frac{N_n}{\sigma_n^2 - e^2},$$

on obtiendra:

$$x_n = \frac{N_n(1 + 3f_n x_n^2)}{\sigma_n^2 - M_n - 3\sigma_n^2 x_n^2},$$

ou bien:

$$3\sigma_n^2 x_n^3 - (\sigma_n^2 - M_n)x_n = - N_n(1 + 3f_n x_n^2)$$

résultat qui s'obtient, d'ailleurs, immédiatement de l'équation (38).

L'équation que nous venons d'établir se résout facilement, en mettant, dans le second membre, la valeur de x_n qui est connue par les approximations précédentes; et on en conclut, comme auparavant, que les x_n forment une série convergente ou même limitée, pourvu que le nombre des N_n ou bien, ce qui revient au même, le nombre des a_n soit fini.

De la manière indiquée, on parvient à exprimer la fonction η au moyen d'une série ne contenant que des termes trigonométriques, et dont la convergence est uniforme.

11. Dans les derniers numéros, on a établi des méthodes pour intégrer l'équation linéaire du second ordre dans laquelle le coefficient de la fonction inconnue est un agrégat de termes trigonométriques. On y a notamment trouvé les moyens nécessaires pour arriver aux développements numériques des différentes fonctions servant à exprimer l'intégrale demandée. Passant maintenant à l'intégrale de l'équation complète (7'), on sera amené à chercher le développement d'une expression comme celle-ci:

$$E = e^{-\nu x - \int z dx} \int \Phi e^{\nu x + \int z dx} dx, \tag{39}$$

où ν^2 signifie une constante renfermant comme terme additif une fonction horistique de tous les coefficients du développement de E, et où l'on a désigné par Φ et z, deux développements uniformément convergents.

Mais bien que le développement de z soit uniformément convergent, il pourrait toutefois arriver que la fonction $\int z dx$ ne le fût plus. Dans un tel cas, l'usage de l'expression signalée paraît d'abord défendu. Cependant, en retranchant de z une partie z_0 telle que $\int z_0 dx$ s'exprime au

moyen d'une série uniformément convergente, on peut choisir z_0 de manière que le reste z_1 devienne aussi petit qu'on voudra. Donc, les fonctions $e^{-\int z_0 dx}$ et $e^{\int z_0 dx}$ se développant toujours en séries uniformément convergentes, on retombe dans une formule du type (39), à la seule exception que z se trouve remplacé par z_1, fonction dont nous considérons la valeur toujours comme très petite par rapport à $\int \Phi_0 e^{\nu x} dx$, Φ_0 étant égal à $\Phi e^{\int z_0 dx}$.

Or, on obtient au moyen d'intégration par parties:

$$\begin{aligned} E &= e^{-\nu x}\int \Phi_0 e^{\nu x} dx - e^{-\nu x - \int z_1 dx}\int z_1 e^{\int z_1 dx} dx \int \Phi_0 e^{\nu x} dx \\ &= e^{-\nu x}\int \Phi_0 e^{\nu x} dx - e^{-\nu x}\int z_1 dx \int \Phi_0 e^{\nu x} dx \\ &\qquad + e^{-\nu x - \int z_1 dx}\int z_1 e^{\int z_1 dx} dx \int z_1 dx \int \Phi_0 e^{\nu x} dx, \\ &= \ldots \end{aligned}$$

de sorte que, si l'on admet la notation

$$\Phi_n e^{\nu x} = z_1 \int \Phi_{n-1} e^{\nu x} dx,$$

la fonction E sera exprimée par le développement

$$\begin{aligned} E = e^{-\nu x}\int \{\Phi_0 - \Phi_1 + \Phi_2 - \ldots \pm \Phi_{m-1}\} e^{\nu x} dx \\ \mp e^{-\nu x - \int z_1 dx}\int \Phi_m e^{\nu x + \int z_1 dx} dx. \end{aligned}$$

Mais bien qu'on puisse généralement supposer que la convergence du développement

$$\Phi_0 - \Phi_1 + \ldots$$

soit très rapide, il sera néanmoins utile d'examiner un peu plus soigneusement la nature du reste donné au moyen de la formule

$$R = e^{-\nu x - \int z_1 dx}\int \Phi_m e^{\nu x + \int z_1 dx} dx.$$

Admettons d'abord:

$$z_1 = \gamma_1 \cos H_1 + \gamma_2 \cos H_2 + \ldots,$$

et supposons que la série

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$$

soit convergente, mais qu'au contraire la série

$$\frac{\gamma_1}{\sigma_1} + \frac{\gamma_2}{\sigma_2} + \dots$$

soit divergente.

Maintenant, en désignant par H'_n ce que devient H_n lorsqu'on remplace, dans la formule

$$H_n = \sigma_n x + b_n,$$

la variable x par une autre ξ, on sait, en vertu des recherches de M. POINCARÉ,[1] que la série

$$\frac{\gamma_1}{\sigma_1}(\sin H_1 - \sin H'_1) + \frac{\gamma_2}{\sigma_2}(\sin H_2 - \sin H'_2) + \dots$$

est convergente, bien que cette convergence ne soit pas uniforme, et que la somme tende vers une limite dépendant de la différence $x - \xi$.

Cela étant, et si nous nous réservons, après avoir exécuté l'intégration demandée, de mettre ξ égal à x, l'expression de R s'écrit de la manière suivante:

$$R = e^{-\nu x - \int^{\xi} z_1 dx} \int \Phi_m e^{\nu x + \int z_1 dx} dx = e^{-\nu x} \int \Phi_m e^{\nu x + \frac{\gamma_1}{\sigma_1}(\sin H_1 - \sin H'_1) + \frac{\gamma_2}{\sigma_2}(\sin H_2 - \sin H'_2) + \dots} dx,$$

formule dans laquelle on pourra développer, suivant les puissances de $\frac{\gamma_1}{\sigma_1}$, de $\frac{\gamma_2}{\sigma_2}$, ... l'exponentielle sous le signe $\int$. Opérant ainsi, on parviendra à des intégrales du type

$$I(n_1, n_2, \dots)$$
$$= \frac{\left(\frac{\gamma_1}{\sigma_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\gamma_2}{\sigma_2}\right)^{n_2} \dots e^{-\nu x}}{1.2.3\dots n_1 . 1.2.3 \dots n_2 \dots} \int \Phi_m (\sin H_1 - \sin H'_1)^{n_1} (\sin H_2 - \sin H'_2)^{n_2} \dots e^{\nu x} dx,$$

où l'on a désigné par $n_1, n_2, \dots$ des entiers positifs.

Je vais d'abord montrer que, en exécutant l'intégration qu'exige la formule signalée, les dénominateurs $\sigma_1^{n_1}, \sigma_2^{n_2}, \dots$ se détruisent en vertu des facteurs sortant des opérations successives.

---

[1] Bulletin astronomique, T. I, p. 319 — voir aussi la note insérée par M. CHARLIER dans les Astr. Nachrichten, T. 122, p. 161.

Dans ce but, admettons la notation

$$\Psi^{(n_1)} = \frac{\left(\frac{\gamma_2}{\sigma_2}\right)^{n_2}\left(\frac{\gamma_3}{\sigma_3}\right)^{n_3}\cdots}{1.2.3\ldots n_2 . 1.2.3\ldots n_3\ldots} \Phi_m(\sin H_2 - \sin H_2')^{n_2}(\sin H_3 - \sin H_3')^{n_3}\ldots,$$

ce qui donne:

$$I(n_1, n_2, \ldots) = \frac{\left(\frac{\gamma_1}{\sigma_1}\right)^{n_1}}{1.2.3\ldots n_1} e^{-\nu x}\int \Psi^{(n)}(\sin H_1 - \sin H_1')^{n_1} e^{\nu x}\, dx.$$

On tire de là, en intégrant par parties, et en remplaçant, après avoir effectué l'intégration, ξ par x ou bien, ce qui revient au même, H_1' par H_1,

$$I(n_1, n_2, \ldots)$$
$$= -\frac{\gamma_1\left(\frac{\gamma_1}{\sigma_1}\right)^{n_1-1}}{1.2.3\ldots(n_1-1)} e^{-\nu x}\int \cos H_1(\sin H_1 - \sin H_1')^{n_1-1}dx \int \Psi^{(n_1)} e^{\nu x}\, dx;$$

ensuite, si nous posons:

$$\cos H_1 \int \Psi^{(n_1)} e^{\nu x}\, dx = \Psi_1^{(n_1)} e^{\nu x},$$

la formule précédente prend la forme

$$I(n_1, n_2, \ldots) = -\frac{\gamma_1\left(\frac{\gamma_1}{\sigma_1}\right)^{n_1-1}}{1.2.3\ldots(n_1-1)} e^{-\nu x}\int \Psi_1^{(n_1)}(\sin H_1 - \sin H_1')^{n_1-1} e^{\nu x}\, dx.$$

Mais encore, si nous admettons la notation

$$I(n_2, n_3, \ldots)$$
$$= \frac{\left(\frac{\gamma_2}{\sigma_2}\right)^{n_2}\left(\frac{\gamma_3}{\sigma_3}\right)^{n_3}\ldots e^{-\nu x}}{1.2.3\ldots n_2 . 1.2.3\ldots n_3\ldots}\int \Phi_m(\sin H_2 - \sin H_2')^{n_2}(\sin H_3 - \sin H_3')^{n_3}\ldots e^{\nu x}\, dx,$$

ce qui serait en pleine concordance avec la notation déjà utilisée, nous aurons:

$$\Psi_1^{(n_1)} = \cos H_1\, I(n_2, n_3, \ldots)$$

et:

$$I(n_1, n_2, \ldots)$$
$$= -\frac{\gamma_1\left(\frac{\gamma_1}{\sigma_1}\right)^{n_1-1}}{1.2\ldots(n_1-1)} e^{-\nu x}\int \cos H_1(\sin H_1 - \sin H_1')^{n_1-1} e^{\nu x} I(n_2, n_3, \ldots)\, dx,$$

formule qui montre que déjà un facteur égal à σ_1 est disparu du dénominateur.

En continuant les opérations indiquées, c'est à dire, en posant de proche en proche:

$$\Psi_2^{(n_1)} e^{\nu x} = \cos H_1 \int \Psi_1^{(n_1)} e^{\nu x} dx,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\Psi_{n_1}^{(n_1)} e^{\nu x} = \cos H_1 \int \Psi_{n_1-1}^{(n_1)} e^{\nu x} dx,$$

on parviendra à la formule

$$I(n_1, n_2, \ldots) = \pm \gamma_1^{n_1} e^{-\nu x} \int \Psi_{n_1}^{(n_1)} e^{\nu x} dx,$$

De même, en opérant de la sorte sur la fonction $I(n_2, n_3, \ldots)$, il s'ensuivra:

$$I(n_2, n_3, \ldots) = \pm \gamma_2^{n_2} e^{-\nu x} \int \Psi_{n_2}^{(n_2)} e^{\nu x} dx,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ,$$

et on parviendra finalement à l'expression

$$I(0) = e^{-\nu x} \int \Phi_m e^{\nu x} dx.$$

Concevons, pour mieux mettre en lumière les résultats auxquels nous sommes déjà arrivés, un exemple spécial et assez simple. Dans ce but, ne considérons qu'un seul des termes dont la somme est désignée par le symbole Φ_m, et supprimons en le coefficient qu'on mettrait inutilement en évidence. Donc, en supposant:

$$\Phi_m = e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x},$$

nous aurons tout de suite:

$$I(0) = \frac{e^{i\lambda x}}{\nu + i\lambda} + \frac{e^{-i\lambda x}}{\nu - i\lambda}.$$

Il s'ensuit, n étant le dernier des nombres $n_1, n_2, \ldots$, ainsi que H le dernier des $H_1, H_2, \ldots$:

$$\varphi_1^{(n)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{i\lambda x+iH}}{\nu+i\lambda}+\frac{e^{-i\lambda x-iH}}{\nu-i\lambda}+\frac{e^{i\lambda x-iH}}{\nu+i\lambda}+\frac{e^{-i\lambda x+iH}}{\nu-i\lambda}\right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\nu(e^{i\lambda x+iH}+e^{-i\lambda x-iH})-\frac{i\lambda}{2}(e^{i\lambda x+iH}-e^{-i\lambda x-iH})}{\nu^2+\lambda^2}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\nu(e^{i\lambda x-iH}+e^{-i\lambda x+iH})-\frac{i\lambda}{2}(e^{i\lambda x-iH}-e^{-i\lambda x+iH})}{\nu^2+\lambda^2}.$$

Inutile de continuer plus loin le calcul; car on voit immédiatement que la fonction $I(n)$ se compose d'un nombre fini de termes, chacun ayant pour dénominateur le produit de $n+1$ facteurs de la forme

$$\nu^2 + (\lambda \pm m\sigma)^2,$$

m étant un entier n'excédant pas n. Et que la puissance γ^n divisée par un tel produit sera toujours très petite, cela se comprend parce qu'on peut choisir les γ aussi petits qu'on voudra, mais encore parce que la quantité ν^2 contient, selon l'hypothèse, une fonction horistique de tous les coefficients figurant dans la fonction E, et par conséquent, aussi dans le reste R.

On conclut de ces considérations que la fonction R se développe, suivant les multiples des divers H, dans une série uniformément convergente.

Les résultats que nous venons d'obtenir nous permettent d'accomplir la résolution de la question entamée dans le n° 2 du paragraphe actuel; car la seule difficulté y restant a été levée par notre méthode générale d'établir l'intégrale d'une équation linéaire du second ordre avec un coefficient de l'inconnue renfermant plusieurs termes périodiques.

Ces résultats suffiront encore pour établir, d'une manière absolue, le développement de l'intégrale de l'équation (53, § 2), aussi que de celles de plusieurs autres équations que nous avons rencontrées dans les pages précédentes.

12. Avant de mettre un terme aux considérations générales que suggère l'emploi des équations résultant de nos transformations dans les paragraphes 5 et 6, voici encore quelques réflexions utiles.

L'admission du principe sur lequel reposent les dites transformations, amenait inévitablement des termes dépendant de la troisième dérivée de l'intégrale cherchée; néanmoins, on put conserver la forme des équations différentielles du second ordre par la raison que ces dérivées étaient multipliées par de très petits coefficients du premier ordre, ce qui permettait d'en remplacer la plus grande partie par une fonction connue. Cependant, comme on a déjà remarqué dans le n° 4 du paragraphe 5, la poursuite de telles éliminations ne conduit pas à un résultat jouissant d'une exactitude surpassant une limite déterminée, bien qu'on puisse de la sorte s'approcher de l'expression rigoureuse de l'intégrale cherchée de manière que l'écart inévitable soit tout à fait insensible dans les calculs numériques. Mais on a aussi, d'un autre côté, révélé le moyen de parvenir à une solution exacte. En effet, la quantité Ω_0, donnée par la formule (15) du paragraphe 5, étant extrêmement petite, la fonction qui résulte de l'intégration de l'équation (16) du même paragraphe, est aussi fort petite, vu que Ω_0 ne doit plus contenir de termes sensibles s'agrandissant par l'intégration. On aura donc, au moyen d'approximations successives, l'intégrale de l'équation (16).

Mais entrons un peu plus profondément dans le détail de la méthode que nous avons mise en usage pour débarrasser l'équation transformée des termes dépendant de la troisième dérivée, et cherchons en la portée.

Evidemment, cette méthode repose, au fond, sur le remplacement de l'équation du troisième ordre par un système de deux équations dont l'une est du second ordre et l'autre du premier. En effet, si nous admettons la notation

$$\frac{d^2z}{dv^2} + Y_1 z = L,$$

ce qui entraîne:

$$\frac{d^3z}{dv^3} = \frac{dL}{dv} - \frac{dY_1}{dv} z - Y_1 \frac{dz}{dv},$$

nous aurons, en introduisant, dans l'équation (14) du paragraphe 5, cette valeur de la troisième dérivée, une équation du second ordre par rapport à z, mais qui renferme, outre z, la fonction inconnue L. D'autre part, nous aurons, pour déterminer la nouvelle inconnue, au lieu de l'équation (28), une équation du type

$$L = N + S_0 - \varphi \frac{dL}{dv}, \tag{40}$$

ce qui revient à avoir mis, dans l'équation (14, § 5), $\Omega + S_0$ à la place de Ω. En conséquence, nous aurions au lieu de l'équation (15, § 5), celle-ci:

$$\Omega_0 = \Omega + S_0 - Y_1 y_0 - Y_2 y_0^2 - Y_3 y_0^3 - \frac{d^2 y_0}{dv^2}.$$

Nous allons voir qu'on pourra déterminer la fonction L de manière que le reste de la solution de l'équation (40), que nous admettons identique avec S_0, soit une quantité très petite ne renfermant que des termes périodiques dont les périodes sont extrêmement courtes. Donc, la fonction S_0 qui figure dans le second membre de l'équation (16), étant en elle-même très petite, ne peut donner, par l'intégration, naissance à des termes sensibles.

Pour montrer la propriété de S_0 que nous venons de signaler, admettons le développement fini

$$L = U_0 + \varphi U_1 + \varphi^2 U_2 + \ldots + \varphi^n U_n + R,$$

et déterminons les fonctions $U_0, U_1, \ldots, U_n, R$ au moyen des équations de condition

$$U_0 = \Omega,$$

$$\left(1 + \frac{d\varphi}{dv}\right) U_1 = -\frac{dU_0}{dv},$$

$$\left(1 + 2\frac{d\varphi}{dv}\right) U_2 = -\frac{dU_1}{dv},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(1 + n\frac{d\varphi}{dv}\right) U_n = -\frac{dU_{n-1}}{dv},$$

$$\varphi \frac{dR}{dv} + R = S_0 - \varphi^{n+1} \frac{dU_n}{dv}.$$

Evidemment, si l'on a désigné par n un nombre très grand, de sorte que le produit $n\frac{d\varphi}{dv}$ peut être considéré comme une quantité de l'ordre zéro, bien que sa valeur soit inférieure à l'unité, les fonctions U_n tendent

à s'agrandir considérablement: d'abord, parce que le dénominateur $1 + n\frac{d\varphi}{dv}$ peut acquérir des valeurs voisines de zéro, et encore, parce que les opérations successives font naître des termes trigonométriques dans les fonctions dont il s'agit, dépendant des multiples très élevés de v, ce qui fera ressortir, en effectuant les différentiations successives, de grands facteurs. En désignant par ε la valeur maximum de la fonction $\frac{d\varphi}{dv}$, on peut estimer la valeur maximum de U_n en raison de celle de U_1 au moyen de l'expression

$$1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots n^2 . \varepsilon^n;$$

donc, si n n'excède pas considérablement la valeur de $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, le produit signalé sera une quantité très petite. Mais le nombre n peut sortir beaucoup hors de cette limite sans que le produit $\varphi^{n+1}\frac{dU_n}{dv}$ cesse d'être une quantité extrêmement petite.

Cela étant, divisons le produit dont nous avons parlé tout à l'heure, en deux parties V_1 et W_1, de sorte que la première renferme seulement des termes de même nature que celle des termes de la fonction N, et la seconde, des termes à périodes très courtes. Or, on pourra appliquer le procédé précédent a l'équation

$$\varphi\frac{dR}{dv} + R = - V_1 + S_1,$$

et égaler le reste S_0 à $W_1 + S_1$. De la sorte, on obtiendrait une valeur très petite de R, mais aussi très exacte, de façon que le nouveau reste S_1 sera extrêmement petit en comparaison avec le reste S_0.

Ainsi, on peut continuer les approximations aussi loin qu'on voudra, et de cette manière obtenir les fonctions cherchées avec une exactitude illimitée.

CHAPITRE III.

Applications aux inégalités des planètes.

Les matières que je viens de traiter dans les chapitres précédents étant accrues considérablement malgré moi, il me faut limiter le plus possible l'exposé des applications qu'on en pourrait faire aux théories des planètes. Je m'arrêterai donc à seulement mettre au jour les principaux traits des grandes perturbations dépendant des arguments astronomiques, ainsi qu'à essayer de répandre quelques lumières sur les inégalités dites librations. Mais je vais ajouter encore quelques remarques relativement aux restes des solutions supposées mises en nombres, prouvant qu'on pourra, en effet, rendre ces restes aussi insignifiants qu'on voudra, bien qu'une partie d'eux contiennent une infinité de discontinuités.

§ 8. *Inégalités dépendant d'arguments astronomiques.*

1. La détermination des inégalités du rayon vecteur ainsi que celles de la latitude s'opèrent en intégrant un système d'équations différentielles du type que nous avons envisagé dans les équations (47) et (48) du paragraphe 5. Ces équations étant du second ordre et du troisième degré, on peut les remplacer par des équations linéaires toutes les fois que les membres de droite ne contiennent pas de termes critiques. Mais comme il y a toujours une infinité de tels termes, bien que leurs coefficients soient généralement extrêmement petits, il convient de conserver dès l'abord la forme plus rigoureuse des équations dont il s'agit.

Considérons en premier lieu le système (47), dont les diverses équations sont plus simples que celles du système (48), et admettons le développement

$$(\Omega) = -\Sigma\gamma_n \cos((1-\sigma_n)u - B_n).$$

Quant aux coefficients γ_n, dont la convergence est celle d'une progression géométrique, nous en supposons les plus grands du premier ordre et du premier degré; nous admettons de plus que le coefficient d'un terme critique soit tout au moins du troisième degré.

Maintenant, après avoir remplacé dans les équations (47), H par $\frac{3}{4}H$, H_0 par $\frac{3}{4}H_0$, etc., ce qui rend plus simples les opérations à exécuter sans déranger l'identité de la somme des équations dont il s'agit avec l'équation (39), nous allons établir l'intégrale de la première d'elles. Le résultat s'écrit immédiatement ainsi:

$$(1) \qquad V_0 = \varkappa \cos((1-\varsigma)u - \Gamma) + \sum \frac{\gamma_n}{(1-\sigma_n)^2 - 1 + \beta_1 + \frac{3}{4}\beta_3 H} \cos((1-\rho_n)u - B_n),$$

$\varkappa$ et Γ étant les deux constantes arbitraires et ς, une quantité qui s'obtient au moyen de l'équation

$$(1-\varsigma)^2 = 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 H.$$

Avec l'expression trouvée, où la fonction horistique H figure encore comme une quantité indéterminée, il sera facile de former le développement de

$$\left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 + (1-\beta)V_0^2,$$

ainsi que celui de

$$\beta_3\left\{(1-\beta)V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 - \frac{3}{4}H_0\right\}V_0 - \beta_0\left\{(1-\beta)V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2\right\}\chi.$$

Dans ces formules, ainsi que dans plusieurs formules précédentes de même nature, on a supposé β du premier ordre par rapport aux forces troublantes, mais cela n'était pas inévitable. Au contraire, on pouvait égaler, sans inconvenient essentiel, cette quantité à zéro, ce qui rendrait un peu plus simples les seconds membres des équations (47) à partir de la deuxième.

Maintenant, si nous déterminons H_0 de manière à débarasser la deuxième des équations (47) du terme dépendant de l'argument $(1-\varsigma)u - \Gamma$,

nous aurons, en omettant la partie s'évanouissant avec les facteurs du premier ordre,

$$H_0 = x^2 + \sum \frac{\gamma_n^2}{\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)^2}, \tag{2}$$

équation dans laquelle nous avons employé la notation

$$\vartheta_n = (1 - \sigma_n)^2 - 1 + \beta_1.$$

De l'équation que nous venons d'établir, on peut tirer une valeur préalable de H, en identifiant cette quantité avec H_0; mais il peut arriver qu'on s'arrête ainsi à un résultat intermédiaire bien différent du résultat cherché, à savoir de la fonction horistique totale. Or, on arrive à un résultat plus satisfaisant en opérant de la manière suivante.

Considérons la deuxième des équations (47), et portons dans les termes de son second membre, termes que nous avons d'ailleurs mis en évidence un peu plus haut, l'expression obtenue de V_0, ainsi que celle de χ que nous supposons connue: de la sorte nous parviendrons à l'équation que voici:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 V_1}{du^2} + \left(1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 H\right) V_1 = &- \sum x^2 g_n \cos((1 - \tau_n)u - C_n) \\
&- \sum\sum \frac{x h_n h_{n'}}{\vartheta_n + \frac{2}{4}\beta_3 H} \cos((1 - \tau_{nn'})u - C_{nn'}) \\
&- \sum\sum\sum \frac{l_n l_{n'} l_{n''}}{\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_{n'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)} \cos((1 - \tau_{nn'n''})u - C_{nn'n''}) \\
&- \sum\sum\sum \frac{p_{nn'n''}\gamma_n \gamma_{n'} \gamma_{n''}}{\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_{n'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_{n''} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)} \cos((1 - \sigma_{nn'n''})u - B_{nn'n''}).
\end{aligned}$$

Dans cette équation, on a employé plusieurs notations nouvelles: on a d'abord désigné par g_n des quantités de même nature que les γ_n, par τ_n, des quantites analogues aux σ, par C_n, des angles constants, et on a en particulier admis le développement

$$\beta_0 \chi = \Sigma g_n \cos((1 - \tau_n)u - C_n).$$

On a ensuite désigné: par h_n et l_n, certains coefficients, comme les γ_n et les g_n, tout au moins du premier ordre et du premier degré; par $\tau_{nn'}$, des sommes des coefficients ς, σ_n et $\tau_{n'}$ chacun multiplié par un nombre entier, positif ou négatif; par $C_{nn'}$, de semblables combinaisons des angles Γ, B_n et $C_{n'}$; par $\tau_{nn'n''}$, des combinaisons analogues de σ_n, $\sigma_{n'}$ et $\tau_{n''}$, ainsi que par $C_{nn'n''}$, des combinaisons de B_n, $B_{n'}$ et $C_{n''}$; par $\sigma_{nn'n''}$ et $B_{nn'n''}$, de pareilles sommes des produits de trois σ_n ou de trois B_n avec certains nombres entiers. Finalement, les $p_{nn'n''}$ signifient certains coefficients contenant un facteur purement numérique multiplié par β_3.

Maintenant, si nous admettons encore les notations

$$\omega_n = (1 - \tau_n)^2 - 1 + \beta_1,$$

$$\omega_{nn'} = (1 - \tau_{nn'})^2 - 1 + \beta_1,$$

$$\omega_{nn'n''} = (1 - \tau_{nn'n''})^2 - 1 + \beta_1,$$

$$\vartheta_{nn'n''} = (1 - \sigma_{nn'n''})^2 - 1 + \beta_1,$$

l'intégrale de l'équation précédente sera donnée au moyen da la formule suivante, où l'on a supprimé tout terme dépendant de constantes arbitraires nouvelles:

$$(3)\quad V_1 = \sum \frac{x^2 g_n}{\omega_n + \frac{3}{4}\beta_3 H} \cos((1 - \tau_n)u - C_n)$$

$$+ \sum\sum \frac{x h_n h_{n'}}{\left(\omega_{nn'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)} \cos((1 - \tau_{nn'})u - C_{nn'})$$

$$+ \sum\sum\sum \frac{l_n l_{n'} l_{n''}}{\left(\omega_{nn'n''} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_{n'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)} \cos((1 - \tau_{nn'n''})u - C_{nn'n''})$$

$$+ \sum\sum\sum \frac{p_{nn'n''}\gamma_n\gamma_{n'}\gamma_{n''}}{\left(\vartheta_{nn'n''} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_{n'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_{n''} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)} \cos((1 - \sigma_{nn'n''})u - B_{nn'n''}).$$

Ayant obtenu ce résultat, il faut l'introduire dans la troisième des équations (47). A cette occasion, on déterminera la partie H_1 de la fonction horistique totale, en satisfaisant à la condition que nul terme dé-

pendant de l'argument $(1 - \varsigma)u - l'$ n'apparaisse dans le second membre de l'équation mentionnée. Par cette condition, on sera conduit à une expression de la forme

$$(4)\quad H_1 = \sum \frac{A_n}{\left[\omega_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right]^2}$$

$$+ \sum\sum \frac{A_{nn'}}{\left[\left(\omega_{nn'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\right]^2}$$

$$+ \sum\sum\sum \frac{A_{nn'n''}}{\left[\left(\omega_{nn'n''} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_{n'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\right]^2}$$

$$+ \sum\sum\sum \frac{A'_{nn'n''}}{\left[\left(\vartheta_{nn'n''} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_{n'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_{n''} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\right]^2},$$

les coefficients A étant tout connus et respectivement du deuxième, du quatrième, du sixième et du huitième ordre.

En réunissant les équations (2) et (4), et en identifiant $H_0 + H_1$ avec H, on aura une nouvelle équation d'où l'on pourra toujours tirer une valeur réelle et positive de H. Certes, cette équation sera très compliquée, mais il faut toutefois se rappeler que, si l'on s'arrête aux termes d'un degré pas très élevé, le nombre des termes critiques sera très petit, de sorte qu'on pourra tout d'abord rejeter la plupart des termes apparaissant dans la somme des deux équations mentionnées. On aura néanmoins une valeur de H ayant le caractère d'une véritable approximation. Ce sont seulement les termes du deuxième degré et ceux dont les diviseurs sont presque évanouissants qu'il faut retenir en opérant cette première approximation.

On pourrait encore s'imaginer qu'il serait quelquefois nécessaire de considérer simultanément avec les termes de H_0 et de H_1 quelques termes provenant des fonctions $V_2, V_3, \ldots$. Certes, cela peut arriver, et il faudrait opérer, le cas échéant, en continuant les procédés que nous venons d'expliquer, mais un tel cas est si rare et si peu probable que nous ne nous en soucions pas.

Quant à la convergence des développements des diverses fonctions V, on s'en convainc par la circonstance que H est une fonction horistique de tous les coefficients se trouvant dans la somme $V_0 + V_1 + \ldots$ Il s'ensuit encore que cette somme elle-même constitue une série convergente, parce qu'autrement une valeur assez grande de H sortirait d'un nombre fini de fonctions V, ce qui à son tour rendrait ces fonctions très petites et même insensibles.[1]

Encore une remarque. En se rappelant qu'un coefficient isolé x_n donné au moyen de l'équation

$$x_n = \frac{\gamma_n}{\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H},$$

change de signe sans passer par zéro, ni par l'infini, lorsque cette équation admet des racines égales, et en considérant qu'il y a un nombre infini de valeurs négatives des ϑ_n qui s'accordent à peu près avec la condition de racines égales, et qui rempliraient cette condition exactement, si la constante arbitraire x subissait un changement même extrêmement petit, on en conclut que *les divers x_n ne sont pas des fonctions uniformes de la constante d'intégration.* Ce résultat s'énonce aussi en disant *qu'une infinité de x_n ne peuvent pas être développés suivant les puissances de Δx, quelque petit que soit cet accroissement de x.*

Cela est en harmonie avec le théorème que la science doit au génie de M. POINCARÉ, et que l'éminent géomètre a exprimé par les mots: *le problème des trois corps n'admet pas d'autre intégrale uniforme que celles des forces vives et des aires.*[2]

Néanmoins si les constantes arbitraires sont fixées, et qu'elles aient des valeurs convenables, on peut toujours, abstraction faite d'un cas extrêmement rare appelé cas asymptotique, obtenir une solution numérique donnant les coordonnées d'une planète au moyen des séries trigonométriques uniformément convergentes.

Mais une telle solution, représentant assurément une fonction uniforme quand les constantes y entrant ont des valeurs fixées, est soumise

[1] Voir, pour plus de détail, le dernier passage du n° 8, § 5.

[2] M. BRUNS, dans une note présentée à la Société de Leipzig et réimprimée dans ce journal, a montré que le problème dont il s'agit n'admet pas d'intégrale algébrique ou abelienne outre les intégrales connues.

à une altération finie, bien que celle-ci puisse être insignifiante, si certaines arbitraires changent d'une quantité si petite qu'on voudra. Or, ayant déterminé numériquement, et jusqu'à un certain degré d'approximation, les constantes arbitraires et les premiers termes des développements mentionnés, ces termes n'offriront généralement aucune discontinuité, lorsque l'arbitraire entrant dans le dénominateur varie d'une quantité très petite; et bien qu'on ne puisse dire la même chose des termes restants, on est néanmoins sûr que leur somme n'excédera jamais une limite déterminée, dont la valeur est proportionnelle à la somme des racines cubiques des termes critiques qu'on a négligés dans la fonction perturbatrice. En d'autres mots: l'étendu du changement brusque que peut subir, après l'intégration, un certain terme critique de la fonction perturbatrice, est une quantité comparable à la racine cubique de ce terme, multiplié, il est vrai, par un facteur de l'ordre — 1 par rapport aux masses troublantes, mais qui est commun à tous les termes. Donc, en considérant que la convergence des termes critiques dans la fonction perturbatrice est comparable à celle d'une progression géométrique, il sera facile de conclure qu'on pourra pousser le degré d'approximation si loin qu'on voudra, de sorte que le reste deviendra moindre qu'une quantité donnée.

Ce que nous venons de dire relativement aux coefficients x_n s'applique aussi à la fonction horistique H considérée comme fonction de la constante arbitraire x. L'examen de cette fonction, qui admet une infinité de discontinuités, bien qu'elle ne devienne jamais infinie, doit être d'un certain intérêt pour l'analyse algebrique.

2. Quant à l'application des équations (48) du paragraphe 5, on fera tout d'abord la remarque que chacune d'elles s'intègre, le second membre étant supposé tout connu, d'après les méthodes que j'ai développées avec assez de détail pour le cas d'un seul terme tout connu. Il n'y a, en effet, que très peu à ajouter aux matières du chapitre I pour étendre les règles du calcul y exposées aux cas de plusieurs termes connus. Envisageons d'abord l'application de la méthode que nous venons d'exposer dans le n° 4 du paragraphe 1.

A cet égard, reprenons une équation quelconque du système (48) du paragraphe 5, et remplaçons y: V_n par ρ; u, par v; $(1-\beta)V_n^2 + \left(\frac{dV_n}{du}\right)^2$,

par η^2; β_3 par $\frac{3}{4}\beta_3$. Ensuite, figurons-nous que la partie $\frac{3}{4}\beta_3(H - H_n)$, qui ne dépend pas des coefficients entrant dans la fonction V_n, soit réunie avec β_1. Nous aurons de la sorte:

$$(5) \qquad \frac{d^2\rho}{dv^2} + \left(1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right)\rho = - \Sigma\gamma_n \cos((1 - \sigma_n)v - B_n).$$

Maintenant, si l'on opère les transformations indiquées dans le n° 4 du paragraphe 1, on retrouvera les équations (24), (25), (26) et (27) du dit paragraphe, à la seule exception que le second membre de l'équation (24) sera dans le cas actuel:

$$-\frac{1}{(1 + \psi)^3}\Sigma\gamma_n \cos((1 - \sigma_n)v - B_n).$$

Ecrivons l'intégrale de l'équation envisagée de la manière suivante:

$$E = k\cos((1-\varsigma)u - G) + \sum \frac{\gamma_n}{(1-\sigma_n)^2 - (1-\beta)} \cos((1-\sigma_n)u - B_n + (1-\sigma_n)\Psi) + \theta,$$

k et G étant les deux arbitraires; θ, une correction que nous allons déterminer prochainement, et β, la quantité $\beta_1 + \frac{3}{4}\beta_3 H$.

Puisque H est une fonction horistique de tous les coefficients qui entrent dans l'expression que nous venons d'établir, ce développement est uniformément convergent, du moins si l'on ne tient pas compte de la correction θ. Pour déterminer cette correction, différentions l'expression précédente de E, et introduisons le résultat, ainsi que la valeur de E, dans l'équation (24) du § 1. Nous avons de la sorte un résultat qui renfermera une partie dépendant du facteur $\frac{d\Psi}{du}$, une autre partie dépendant du facteur $\left(\frac{d\Psi}{du}\right)^2$ et une troisième partie multipliée par $\frac{d^2\Psi}{du^2}$. En considérant que ces derniers facteurs sont des quantités du deuxième ordre, nous aurons, si nous ne retenons que les termes du premier ordre, et que nous nous rappelions la valeur approchée

$$\frac{d\Psi}{du} = \frac{3}{8}\beta_3(\eta^2 - H),$$

l'équation suivante, servant à déterminer la correction θ:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \left(1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\theta$$

$$= \frac{3}{4}\beta_3(\eta^2 - H)\sum \frac{(1-\sigma_n)^2\gamma_n}{(1-\sigma_n)^2 - (1-\beta)} \cos((1-\sigma_n)u - B).$$

Après avoir porté, dans l'équation trouvée, la valeur approchée

$$\eta^2 = E^2 + \left(\frac{dE}{du}\right)^2,$$

on obtiendra par intégration une expression de θ, nécessairement convergente, parce que H est horistique aussi par rapport aux coefficients dans l'expression de θ, et dont la valeur numérique est aussi généralement très petite par rapport à celles des plus grands coefficients mis en évidence dans l'expression de E. Mais il peut aussi arriver, dans le cas de termes critiques, que la fonction θ soit du même ordre que les premiers termes figurant dans E. En tel cas, on peut opérer de la manière suivante.

On commence par établir l'expression approchée

$$E = k\cos((1-\varsigma)u - G) + \sum_1^\infty \frac{\gamma_n}{(1-\sigma_n)^2 - (1-\beta)} \cos((1-\sigma_n)u - B_n),$$

d'où l'on tire par différentiation

$$\frac{dE}{du} = -(1-\varsigma)k\sin((1-\varsigma)u - G)$$

$$-\sum_1^\infty \frac{(1-\sigma_n)\gamma_n}{(1-\sigma_n)^2 - (1-\beta)} \sin((1-\sigma_n)u - B_n).$$

En multipliant par cette équation, membre par membre, l'équation

$$\frac{d^2E}{du^2} + (1-\beta)E = -\sum_1^\infty \gamma_n \cos((1-\sigma_n)v - B_n),$$

et en ne retenant que les termes devenant agrandis par l'intégration, on obtiendra

$$\left\{\frac{d^2E}{du^2} + (1-\beta)E\right\}\frac{dE}{du}$$

$$= -\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{n'=0}^{n=\infty} A_{nn'} \sin((\sigma_n - \sigma_{n'})u + (1-\sigma_{n'})\Psi + B_n - B_{n'}),$$

où l'on doit identifier σ_0 avec ς.

Cela étant, différentions l'équation (27) du § 1 deux fois, ce qui nous donne:

$$\frac{d^2\Psi}{du^2} = \frac{3}{8}\beta_3 \frac{d\eta^2}{du},$$

d'où l'on tire, après avoir remplacé $\frac{d\eta^2}{du}$ par sa valeur approximative, à savoir:

$$2\left[\frac{d^2E}{du^2} + (1-\beta)E\right]\frac{dE}{du},$$

l'équation

$$\frac{d^2\Psi}{du^2} = -\frac{3}{4}\beta_3\Sigma\Sigma A_{nn'}\sin\left[(\sigma_n - \sigma_{n'})u + B_n - B_{n'} + (1-\sigma_{n'})\Psi\right].$$

Si, dans cette équation, on met à part les termes dont les indices sont égaux, et que l'on supprime le facteur $(1-\sigma_{n'})$, qui en effet est fort près de l'unité, on tombera dans une équation du type

$$\frac{d^2\Psi}{du^2} = -\alpha^2\sin\Psi - \Sigma A_n\sin(2\lambda_n u + 2B_n + \Psi),$$

où α^2 est une quantité positive ou négative du deuxième ordre, $2\lambda_n$, une différence $\sigma_n - \sigma_{n'}$ et $2B_n$, une différence $B_n - B_{n'}$.

On cherchera la solution de cette équation, en utilisant une des méthodes que j'ai exposées, soit dans le § 3 du présent mémoire, soit dans le mémoire *Untersuchungen über die Convergenz* etc.».

Ayant ainsi obtenu une expression approximative de Ψ, on formera celles des fonctions $\cos\Psi$ et $\sin\Psi$, après quoi il sera facile d'établir une nouvelle équation du type de l'équation (24) § 1. Ensuite, on déduira une nouvelle valeur de $\frac{dE}{du}$, laquelle servira à renouveler les procédés que nous venons d'expliquer précédemment, et notamment à refaire le calcul du coefficient α^2 ainsi que celui des coefficients A_n.

De la manière dont nous venons d'esquisser les traits principaux du calcul, on parviendra à une solution aussi approchée de l'équation (5).

3. Quant à l'application de la méthode du § 2, il suffit de réveiller l'attention du lecteur sur l'équation (14) du dit paragraphe, la-

quelle renferme, dans son second membre, le terme $-\frac{9}{128}\beta^2\Delta z^2$.[1] Elle se transforme donc, au moyen d'une substitution convenable, en une autre du type de l'équation (15), si l'on y augmente le coefficient de y par la quantité $-bH$, b étant un coefficient du même ordre que β^2, et H, une fonction horistique des coefficients dans le développement de la fonction Δz. L'équation qu'on obtient ainsi s'intègre en employant la méthode du n° 5 du paragraphe précédent.

Mais il nous reste à signaler une difficulté qui concerne le développement de la fonction W.

On a, dans le § 2, établi les formules

$$M = -\frac{d^2G}{dv^2}; \qquad N = -\frac{d^2H}{du^2};$$

cependant, si l'équation (1) renfermait, dans son membre de droite, plusieurs termes tout connus, les expressions de M et de N seraient évidemment plus compliquées. Or, il peut arriver que l'intégrale

$$\int \left[M\frac{dG}{dv} + N\frac{dH}{dv}\right] dv$$

que renferme l'équation (12), ne soit pas exprimée au moyen d'un développement convergent, bien que les fonctions M et N soient données par de telles séries. Dans ce cas, la méthode envisagée n'est plus applicable, bien qu'elle puisse rendre de grands services toutes les fois que l'intégrale mise en évidence s'exprime au moyen d'un développement convergent.

Je n'insiste pas davantage sur les nombreuses applications qu'on pourra faire des théories précédentes au calcul des perturbations du rayon vecteur et de la troisième coordonnée.

4. La détermination des grandes inégalités de la longitude exige qu'on intègre l'équation (1) du § 6. Cette équation étant assez compliquée, on l'a transformée de diverses manières afin de parvenir à d'autres équations plus simples, notamment aux équations (17) et (29). Je vais main-

---

[1] Par une erreur d'impression, le signe = avant le terme $-\frac{27}{128}\beta^2(-\delta+z_0)\Delta z^2$ a manqué.

tenant montrer l'application de ces deux équations au calcul des grandes inégalités et aux inégalités élémentaires.

Supposons qu'on ait, dans le second membre de l'équation (17), remplacé la variable v, qui y figure encore dans les arguments, par la nouvelle variable u, et négligeons de plus les petits termes de courte période, qui effectivement sont sans aucune importance. Alors nous aurons, en mettant ν^2 au lieu de β_1

$$\frac{d^2y}{du^2} - \nu^2 y = -\sum a_n \sin(\sigma_n u + b_n), \tag{6}$$

dont l'intégrale s'écrit immédiatement ainsi:

$$y = c_1 e^{\nu u} + c_2 e^{-\nu u} + \sum \frac{a_n}{\sigma_n^2 + \nu^2} \sin(\sigma_n u + b_n).$$

Pourvu que les a_n forment une série convergeant comme une progression géométrique, ce que nous avons supposé dès le début, la série trigonométrique figurant dans l'expression de y est visiblement uniformément convergente quelles que soient les valeurs de σ_n. Quant aux deux arbitraires c_1 et c_2, il faut évidemment les égaler à zéro, vu qu'autrement des exponentielles paraîtraient dans l'expression de la longitude. Or, il est dans la nature des choses que cela soit ainsi; parce que: égaler à zéro les constantes c_1 et c_2, c'est faire prendre au mouvement moyen sa vraie valeur. Au contraire, si l'on avait calculé les coordonnées d'une planète en employant une valeur du mouvement moyen pas tout à fait exacte, on aurait nécessairement établi certains développements suivant les puissances du temps, développements qui cesseraient d'être convergents lorsque le temps eût acquis des valeurs dépassant une certaine limite.

Considérons maintenant, au lieu de l'équation (6), celle-ci:

$$\frac{d^2y}{du^2} - \nu^2 y = -A \sin(2\lambda u + 2b + sy), \tag{7}$$

où l'argument du seul terme de droite renferme la fonction cherchée multipliée par un nombre s que nous supposons assez grand. L'équation considérée convient d'ailleurs à la recherche d'une inégalité de très longue période provenant d'un terme très éloigné dans le développement de la fonction perturbatrice. Il y a donc lieu de supposer A et λ très petits, ainsi que le produit sA.

En désignant par φ un facteur que nous allons choisir convenablement, nous mettons l'équation précédente sous la forme

$$(7') \quad \frac{d^2y}{du^2} = -\frac{A}{1+\varphi}\sin(2\lambda u + 2b + sy) + \nu^2 y - \frac{\varphi A}{1+\varphi}\sin(2\lambda u + 2b + sy);$$

puis, nous déterminons un module elliptique en établissant l'équation

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 = \frac{sA}{\lambda^2(1+\varphi)}.$$

Maintenant, si nous négligeons la somme des deux derniers termes du second membre, nous aurons facilement:

$$(8) \quad y = \frac{2}{s}\left\{\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(\lambda u + b) - \lambda u - b\right\}$$

$$= \frac{2}{s}\left\{\frac{2q}{1+q^2}\sin 2(\lambda u + b) + \frac{2q^2}{2(1+q^4)}\sin 4(\lambda u + b) + \ldots\right\}$$

et:

$$\frac{\varphi A}{1+\varphi}\sin(2\lambda u + 2b + sy) = \frac{\varphi\lambda^2}{s}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 \sin 2\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(\lambda u + b)$$

$$= \frac{\varphi\lambda^2}{s}\left\{\frac{16q}{1+q^2}\sin 2(\lambda u + b) + \frac{32q^2}{1+q^4}\sin 4(\lambda u + b)\right\}.$$

Ensuite, si l'on fait:

$$\varphi = \frac{1}{4}\frac{\nu^2}{\lambda^2},$$

les termes dépendant de $\sin 2(\lambda u + b)$ disparaîtront de l'équation (7'), de sorte que la somme des deux derniers termes de son second membre sera toujours très petite autant que le module k^2 n'est pas très près de l'unité. Donc, en calculant le module moyennant la formule

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 = \frac{4sA}{4\lambda^2 + \nu^2}$$

l'expression de y que nous venons de signaler, donnera avec un très haut degré d'approximation, la solution de l'équation (7'). Il serait facile d'en obtenir la correction si approchée qu'on voudrait.

En considérant, dans le développement de la fonction perturbatrice, des termes assez éloignés pour que le produit sA soit moindre que ν^2,

on voit immédiatement que des inégalités sensibles ne peuvent pas se produire en dehors d'une certaine limite, même si λ acquiert une valeur évanouissante. Il est encore visible que, si l'on calcule une suite de modules avec divers A convergeant comme une progression géométrique, la série des modules convergera de la même manière. Donc, en supposant, dans le second membre de l'équation (7), une suite de termes au lieu d'un seul, dont les coefficients convergent comme une progression géométrique, on pourra renouveler les opérations que nous avons exposées dans le n° 3 du § 6, et on aura de la sorte une expression de l'intégrale cherchée, d'abord plus convergente que les différentes parties de l'expression (11) du même paragraphe. Il serait facile de rapprocher ces deux résultats, l'un de l'autre; je n'insisterai cependant pas sur ce point.

5. S'il s'agit de calculer un terme élémentaire, et surtout une grande inégalité provenant d'un terme de la fonction perturbatrice multipliée par un coefficient très grand par rapport à ν^2, la méthode simple que nous venons d'expliquer précédemment ne paraît pas assez efficace, principalement parce que les équations (6) et (7) ne renferment pas de terme dépendant de y^3. On aura, dans ces cas, un meilleur point de départ pour le calcul, dans l'équation (29) du § 6. Mais cette équation, étant dans sa forme primitive trop compliquée, on lui donnera la forme de l'équation (1) du § 7, ou une forme analogue.

Pour cet effet, mettons:

$$y = \frac{z}{1+\psi}; \qquad dx = \frac{e^{-8pq\cos 2x}}{(1+\psi)^2}\,du,$$

et nous aurons une nouvelle équation, dans laquelle a disparu le terme dépendant de $\frac{dz}{du}$. Puis, en opérant comme dans le n° 6 du § 5, on pourra déterminer la fonction ψ de manière que l'équation résultante prenne la forme

$$\frac{d^2z}{du^2} + \alpha z - \beta z^3 = R, \tag{9}$$

α et β étant des constantes, dont β est toujours positive, mais α généralement négative. La fonction R renferme, il est vrai, des termes dépendant

de z et $\frac{dz}{du}$, ainsi que de ψ, mais ces termes, étant sans importance essentielle, on pourra les négliger dans la première approximation, ou plutôt, n'en considérer que la plus grande partie, en modifiant un peu les valeurs de α et de β.

Cela admis, nous allons chercher la solution de l'équation

$$(10) \qquad \frac{d^2z}{du^2} + \alpha z - \beta z^3 = - a \sin(\sigma u + b),$$

ce qui revient à déterminer le terme élémentaire qui provient du terme mis en évidence dans le second membre.

En opérant comme dans le n° 9 du § 4, nous écrivons l'équation précédente ainsi:

$$\frac{d^2z}{du^2} + (\alpha + h)z - \beta z^3 = - a \sin(\sigma u + b) + hz;$$

puis, en désignant par g, k et x trois quantités constantes, dont une est arbitraire, nous déterminons les autres en vertu des équations

$$\alpha + h = \frac{g^2}{x^2}(1 + k^2); \qquad \beta = 2\frac{g^2k^2}{x^4}.$$

Nous aurons de la sorte:

$$(11) \qquad \frac{d^2z}{g^2du^2} + (1 + k^2)\frac{z}{x^2} - 2k^2\frac{z^3}{x^4} = \frac{1}{g^2}\{- a \sin(\sigma u + b) + hz\}.$$

En admettant la constante h déterminée de manière que le second membre soit aussi petit que possible, on aborde l'intégration de l'équation précédente en mettant ce membre exactement égal à zéro; on obtient ainsi:

$$z = x \operatorname{sn}\left(\frac{g}{x}u + b\right), \quad \text{mod} = k,$$

l'arbitraire qui entre dans l'argument étant égalée à b.

L'autre arbitraire, introduite par l'intégration de l'équation du second ordre, doit être choisie de manière que la période de la fonction elliptique coincide avec celle de $\sin(\sigma u + b)$; donc, il faut mettre:

$$\frac{g}{x}\frac{\pi}{2K} = \sigma.$$

Puis, en égalant la constante h à $\frac{a}{x}$, ce qui annule, dans le second membre de l'équation (1), le terme dépendant de $\sin(\sigma u + b)$, on aura:

$$\alpha + \frac{a}{x} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1 + k^2)\sigma^2,$$

et en soustrayant de cette relation celle ci:

$$\frac{1}{2}\beta x^2 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 \sigma^2,$$

on retiendra:

$$\alpha + \frac{a}{x} - \frac{1}{2}\beta x^2 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \sigma^2,$$

équation qui se met immédiatement sous la forme

$$\frac{1}{2}\beta x^3 + \left[\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \sigma^2 - \alpha\right] x = a.$$

En vertu de cette équation, il sera facile de conclure la valeur de x, à savoir celle du coefficient du terme élémentaire, mais seulement sous la condition que le module k soit connu. Or, la valeur du module n'étant pas connue dès l'abord, on pourra le plus souvent commencer le calcul par mettre $\frac{2K}{\pi}$ égal à l'unité, ce qui conduira à une valeur approchée de x. Avec cette valeur de x, on déduira celle de k au moyen de l'équation

$$k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\beta x^2}{\sigma^2},$$

et, ayant ainsi une valeur approchée de $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2$, on renouvellera le calcul de x.

Dans les cas où k s'approche beaucoup de l'unité, on peut entamer les approximations en utilisant l'équation

$$\frac{1}{2}\beta\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) x^3 - \alpha x = a.$$

On voit, par l'analyse précédente, combien peut être différente, la vraie valeur du coefficient d'un terme élémentaire de celle qu'on obtiendrait en employant la formule brute

$$x = \frac{a}{\sigma^2}.$$

§ 9. *De la libration.*

1. L'inégalité dans les mouvements de translation que LAPLACE nomme libration, se manifesta pour la première fois dans le système des satellites de Jupiter.

Les observations ayant prouvé que le mouvement moyen du premier satellite, moins trois fois celui du second, plus deux fois celui du troisième est toujours égal à zéro, l'auteur de la mécanique céleste en découvrit la vraie cause et établit ainsi la théorie de la libration. — Depuis lors, un long intervalle s'était accompli avant que le second cas d'une telle inégalité fut signalé, cette fois, par M. M. HALL, MARTH et NEWCOMB dans le système des satellites de Saturne. Mais ce cas étant plus compliqué que celui de LAPLACE, il paraît que la théorie en est encore susceptible de quelque perfectionnement. Il en est de même, mais à un plus haut degré encore, de quelques autres tentatives, peut-être plus intrépides que décisives, parce que les librations auxquelles visent ces essais, se trouvent mêlées avec plusieurs autres inégalités, ce qui rend extrêmement difficile leur étude.

La théorie des librations est généralement très compliquée. On ne saurait la traiter avec succès — sauf dans des cas exceptionnellement simples — sans avoir recours aux fonctions elliptiques. Cela s'entend de l'analyse communiquée dans la section II de mon mémoire de 1887; et presque en même temps, M. TISSERAND montra, d'une manière très claire, ce même fait dans une note insérée dans les Comptes rendus de l'académie de Paris. Dans mon mémoire cependant, j'ai tenté de donner quelques renseignements sur la convergence des inégalités ordinaires, lorsque les mouvements moyens remplissent la condition de la libration; et on y peut voir qu'une grande valeur du coefficient de cette inégalité, rend douteuse la convergence de certaines autres inégalités. Donc, si l'on a obtenu, en vertu des observations, une valeur considérable du coefficient dont il s'agit — car ce coefficient est en effet une constante d'intégration — il y aurait lieu à quelques doutes de la réalité du résultat.

Que LAPLACE, alors que la théorie des fonctions elliptiques était à peine créée, ait néanmoins réussi à obtenir un résultat, q'on peut con-

sidérer comme à peu près exact, cela doit être attribué d'abord à la presque insensibilité du coefficient de la libration, mais aussi à la circonstance que la période de cette inégalité, dans le cas envisage, est indépendante des excentricités et des inclinaisons. Dans le cas opposé, à savoir si la période de la libration dépendait des excentricités ou des inclinaisons ou de ces deux éléments ensemble, les termes horistiques l'emporteraient considérablement sur la dite période, et ils pourraient même la rendre imaginaire finalement. On peut, en effet, énoncer la règle générale que: *plus élevé est le degré d'un terme critique, moins il est probable qu'il en sortira un terme de libration.*

Dans aucune des recherches de 1887, ni dans celles de M. TISSERAND, ni dans les miennes, on n'avait pu tenir compte des termes horistiques, alors encore inconnus. C'est sur le rôle que jouent ces termes dans la théorie des librations que je vais donner quelques remarques assez rapides.

2. Considérons en premier lieu le cas simple où le coefficient de la libration est très petit, de sorte qu'on en peut négliger les puissances surpassant la première.

Si dans l'équation (7) du paragraphe précédent, on met λ et b égaux à zéro, et qu'on remplace u par v, il en résulte:

$$\frac{d^2y}{dv^2} - \nu^2 y = - A \sin sy. \tag{1}$$

Voilà l'équation différentielle, d'où l'on déduit, par intégration, l'expression de l'inégalité cherchée. Aprés avoir développé le second membre suivant les puissances de sy et négligé les termes dont le degré surpasse le premier, on aura immédiatement l'expression analytique de l'inégalité demandée. La voici:

$$y = l \sin (\sqrt{sA - \nu^2}.v - L),$$

l et L étant les deux arbitraires dont nous supposons la première très petite.

Quand le produit sA, que nous supposons toujours positif, l'emporte sur le coefficient ν^2, aussi positif, la solution trouvée sera réelle et périodique; dans le cas opposé, c'est à dire, si:

$$\nu^2 > sA,$$

la solution sera donnée au moyen des exponentielles multipliées par des

constantes arbitraires. Evidemment, ces constantes doivent être égales à zéro.

En supposant, par impossible, le coefficient ν^2 rigoureusement égal à zéro, des librations pourraient se produire, quelque petit que fût le produit sA; par contre, à l'état réel des choses, il y a là une limite, déterminée par la condition

$$sA - \nu^2 > 0.$$

Par ce résultat, on conclut qu'une relation linéaire de la forme

$$s_0 v + s_1 v' + s_2 v'' + \ldots = \text{termes périodiques},$$

$v, v', v'', \ldots$ étant des arguments astronomiques, et $s_0 s, {}_1, \ldots$ des entiers quelconques, positifs ou négatifs, ne reste pas maintenue par les forces attractives, si la somme des entiers surpasse un certain nombre.

En partant de l'équation (1), il sera facile d'obtenir un résultat plus approché que le précédent. Pour y arriver, écrivons la dite équation, après avoir désigné par h un facteur constant, de la manière suivante:

$$\frac{d^2y}{dv^2} = -(A - h)\sin sy + \nu^2 y - h \sin sy.$$

Maintenant, si l'on fait:

$$h = \frac{\nu^2}{s},$$

la somme des deux derniers termes de droite de l'équation précédente sera très petite, et on aura, en intégrant l'équation

$$\frac{d^2y}{dv^2} = -\left(A - \frac{\nu^2}{s}\right)\sin sy,$$

une valeur très approchée de la fonction y. Pour en déduire la correction, il faut recourir à l'équation (24) de l'article III de mon mémoire *Untersuchungen über die Convergenz* etc.

3. Dans les recherches sur les librations, il faut évidemment qu'on emploie des termes horistiques aussi bien déterminés que possible. Il est donc à présumer que l'emploi de l'équation (29) du § 6, ou bien de l'équation (9) du paragraphe précédent conduise plus rapidement au résultat que ne le fait, l'équation (1). Car dans cette équation-là, la partie des termes horistiques mise en évidence est, comme on le trouve immédiatement, plus grande que dans l'équation dernièrement citée.

Reprenons donc l'équation (9) du paragraphe précédent, et remplaçons-y, pour établir dès l'abord le cas de la libration, la fonction R par le terme $-A\sin sz$. Puis, en développant ce terme suivant les puissances de sz, et en ne retenant que les deux premiers membres de ce développement, nous aurons:

$$\frac{d^2z}{du^2}+(\alpha+sA)z-\left(\beta+\frac{1}{6}s^3A\right)z^3=0. \tag{2}$$

Admettons encore les notations:

$$z=\frac{\theta}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{1}{6}s^3A\right)}};\qquad \frac{1}{\mu^2}dx^2=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{1}{6}s^3A\right)}\,du^2,$$

$$a=\frac{\alpha+sA}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{1}{6}s^3A\right)}},$$

μ étant une constante à notre disposition, et rappelons-nous que le coefficient a peut prendre des valeurs négatives aussi bien que des valeurs positives. Notre équation sera alors:

$$\mu^2\frac{d^2\theta}{dx^2}+a\theta-2\theta^3=0.$$

On en déduit tout de suite, en désignant par g^2 une constante d'intégration que nous supposons moindre que l'unité,

$$\begin{aligned}\mu^2\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2&=g^2-a\theta^2+\theta^4\\&=g^2-\frac{1}{4}a^2+\left(\frac{1}{2}a-\theta^2\right)^2.\end{aligned} \tag{3}$$

Mettons encore:

$$\frac{1}{4}a^2-g^2=b^2,$$

et nous aurons:

$$\mu^2\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2=\left(\frac{1}{2}a-b-\theta^2\right)\left(\frac{1}{2}a+b-\theta^2\right), \tag{4}$$

ou bien:

$$\mu^2\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a - b\right)\left(\frac{1}{2}a + b\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{\frac{1}{2}a - b}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{\frac{1}{2}a + b}\right).$$

Donc, si nous posons:

$$\theta^2 = \left(\frac{1}{2}a - b\right)\zeta^2; \qquad \frac{\frac{1}{2}a - b}{\frac{1}{2}a + b} = k^2; \qquad \frac{1}{2}a + b = \mu^2,$$

il résultera:

$$\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 = (1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2),$$

ce qui donne:

$$\zeta = \operatorname{sn} x: \qquad \theta = \frac{g}{\mu}\operatorname{sn} x = \frac{g}{\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a + g\right)\left(\frac{1}{2}a - g\right)}}}\operatorname{sn} x,$$

la deuxième constante d'intégration étant renfermée dans x.

Si b était égal à zéro, le module k prendrait la valeur 1, et le cas deviendrait asymptotique. Si ensuite g devenait plus grand que $\frac{1}{2}a$, la transformation précédente conduirait à des expressions dépendant des arguments imaginaires: pour les éviter, écrivons l'équation (3) ainsi:

$$\mu^2\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 = (g + n\theta + \theta^2)(g - n\theta + \theta^2), \tag{5}$$

le coefficient n étant égal à $\sqrt{a + 2g}$, de sorte qu'on a:

$$2g - n^2 = -a.$$

Maintenant, si l'on introduit, au lieu de θ, une nouvelle fonction ψ, en mettant:

$$\theta = \sqrt{g}\,\frac{1 - \varepsilon \operatorname{tang}\psi}{1 + \varepsilon \operatorname{tang}\psi},$$

on trouvera par un calcul pas très long:

$$\psi = \operatorname{am} x; \qquad k^2 = 1 - \varepsilon^4; \qquad \mu^2 = \frac{1}{4} g\left(2 + \frac{n}{\sqrt{g}}\right)^2;$$

$$\varepsilon^2 = \frac{2\sqrt{g} - n}{2\sqrt{g} + n}.$$

Nous avons supposé:

$$a \leqq 2g;$$

donc, le coefficient n est réel et moindre que $2\sqrt{g}$. Il s'ensuit que ε^2, et en conséquence aussi k^2 sont des quantités réelles, positives et moindres que l'unité. Mais dans ce cas, puisque la fonction θ peut passer par l'infini, ce qui ne convient pas aux inégalités dont il s'agit, il faut mettre g égal à zéro. Donc, la libration est impossible.

En supposant:

$$a = 2g,$$

on aura:

$$n = 2\sqrt{g},$$

et en conséquence:

$$\varepsilon^2 = 0; \qquad k^2 = 1;$$

on est donc retombé dans le cas asymptotique.

Supposons finalement a négatif, ce qui entraîne la forme suivante de l'équation (4):

$$\mu^2\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a + b + \theta^2\right)\left(\frac{1}{2}a - b + \theta^2\right).$$

En mettant:

$$\theta = \frac{g}{\mu} \operatorname{tang} \psi = \sqrt{\frac{a}{2} - b} \operatorname{tang} \psi,$$

il résultera l'équation que voici:

$$\mu^2\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a + b\right)\left(1 - \left(1 - \frac{\frac{1}{2}a - b}{\frac{1}{2}a + b}\right)\sin \psi^2\right).$$

Donc, les quantités

$$\mu^2 = \frac{1}{2}a + b; \qquad k^2 = 1 - \frac{\frac{1}{2}a - b}{\frac{1}{2}a + b}$$

sont réelles, et le module k, moindre que l'unité. En conséquence, la fonction ψ peut prendre toute valeur entre $-\infty$ et $+\infty$, en sorte que θ passera par l'infini. Mais cela est contre la nature des inégalités considérées, d'où l'on conclût que la libration est impossible, ce qui revient à dire qu'il faut égaler à zéro la constante g.

Par l'analyse précédente, deux choses ont été démontrées: 1° que la libration est impossible si le coefficient a est négatif; 2° que la libration peut exister si le coefficient mentionné est positif, mais seulement à condition que:

$$g \overline{<} \frac{1}{2}a.$$

Or, pour les termes éloignés dans le développement de la fonction perturbatrice, le coefficient a est négatif; on en conclut que des librations ne peuvent pas s'engendrer de ces termes.

ÜBER TERNÄRE DEFINITE FORMEN

VON

DAVID HILBERT
in KÖNIGSBERG i. Pr.

Eine ganze rationale homogene Funktion f der drei Veränderlichen x, y, z, deren Ordnung n eine gerade Zahl ist und deren $N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Coefficienten reelle Zahlen sind, möge eine ternäre definite Form genannt werden, wenn dieselbe für reelle Werte der Veränderlichen x, y, z stets positiv ausfällt oder den Werth 0 annimmt. Giebt es reelle Wertsysteme der Veränderlichen, für welche die definite Form f den Wert 0 annimmt, so ist, wie man leicht zeigt, die Diskriminante der Form f nothwendig gleich 0.

Die eben aufgestellte Definition lässt unmittelbar erkennen, dass durch beliebig oft wiederholte Addition und Multiplication von definiten Formen stets Formen entstehen, welche wiederum definit sind, d. h. die Gesammtheit aller definiten Formen bildet einen Formenbereich von der Beschaffenheit, dass jede durch Addition und Multiplication aus Formen des Bereiches zusammengesetzte Form wiederum dem Bereiche angehört. Ferner ist jedes Quadrat einer beliebigen Form mit reellen Coefficienten eine definite Form und wir erhalten daher durch Addition und Multiplication solcher Formenquadrate stets wiederum definite Formen. Ich habe jedoch in einer Abhandlung: »*Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*«[1] gezeigt, dass nicht jede definite Form auf diese

[1] Mathematische Annalen. Bd. 32, S. 342.

Weise als Summe von Formenquadraten dargestellt werden kann, und zwar lautet der bezügliche dort von mir bewiesene Satz, wie folgt

Eine jede ternäre quadratische und biquadratische definite Form lässt sich als Summe von drei Quadraten reeller Formen darstellen. Unter den definiten Formen von der 6^{ten} oder von höherer Ordnung giebt es jedoch stets solche, welche **nicht** *einer endlichen Summe von Quadraten reeller Formen gleich sind.*

Um dennoch zu einer allgemein gültigen Darstellungsform für die definiten Formen zu gelangen, beachten wir zunächst die Thatsache, dass allemal, wenn ein Faktor einer definiten Form definit ist, nothwendig auch der übrig bleibende Faktor eine definite Form sein muss; es würde daher der definite Charakter einer Form auch bereits dann erkennbar sein, wenn dieselbe sich als Bruch darstellen liesse, dessen Zähler und Nenner gleich Summen von Formenquadraten sind. *Eine solche Darstellung ist nun in der That stets möglich,* wie im folgendem gezeigt werden wird. Der Beweis dafür bietet erhebliche Schwierigkeiten dar; ich theile der Übersicht halber die Darlegung desselben in 9 Abschnitte und kennzeichne kurz am Anfange eines jeden Abschnittes das zu erstrebende Ziel, am Schlusse des Abschnittes die in demselben gefundenen Resultate.

1.

Um die Existenz von gewissen definiten Formen, deren Besonderheit später ausführlich dargelegt werden wird, nachzuweisen, bedienen wir uns des folgenden Hilfssatzes:

Es sei eine ternäre Form F von der n^{ten} Ordnung und mit reellen Coefficienten vorgelegt von der Beschaffenheit, dass die Curve $F = 0$ δ gewöhnliche Doppelpunkte $P_1, \ldots, P_\delta$ mit getrennt liegenden Tangenten und ausserdem beliebige andere Doppelpunkte besitzt; es sei ferner F' eine Form von derselben Ordnung n und mit reellen Coefficienten, welche in den Punkten $P_1, \ldots, P_\delta$ verschwindet, dagegen in sämmtlichen übrigen

Doppelpunkten der Curve $F = 0$ einen von 0 verschiedenen Werth annimmt; endlich soll es möglich sein, $N - \delta$ Punkte in der Ebene zu bestimmen derart, dass durch diese und durch die δ Punkte $P_1, \ldots, P_\delta$ sich keine Curve n^{ter} Ordnung hindurch legen lässt: unter diesen Voraussetzungen giebt es stets eine Curve $G = 0$ von der nämlichen Ordnung n, deren Coefficienten sich von den Coefficienten der Form F nur um beliebig kleine Grössen unterscheiden und welche in beliebiger Nähe der Punkte $P_1, \ldots, P_\delta$ je einen gewöhnlichen Doppelpunkt mit getrennten Tangenten besitzt, sonst aber keinen weiteren singulären Punkt aufweist.

Der Einfachheit halber setzen wir im Folgenden stets die dritte Coordinate z der Einheit gleich; die Coordinaten der δ Punkte $P_1, \ldots, P_\delta$ seien dann bezüglich

$$x = a_1, \ \ldots, \ x = a_\delta,$$

$$y = b_1, \ \ldots, \ y = b_\delta.$$

Die gesuchte Form G nehmen wir an in der Gestalt

$$G = F + t(F' + \Omega),$$

wo t eine Veränderliche und Ω wiederum eine Form n^{ter} Ordnung bedeutet: wir wollen dann die N Coefficienten $u_1, \ldots, u_N$ dieser Form Ω als Funktionen von t derart bestimmen, dass die Form G für genügend kleine Werthe von t die Bedingungen des obigen Hilfssatzes erfüllt. Zu dem Zwecke führen wir die folgenden Ausdrücke ein:

$$\begin{aligned} \alpha_s &= a_s + t(A_s + \xi_s), \\ \beta_s &= b_s + t(B_s + \eta_s), \end{aligned} \qquad (s = 1, \ldots, \delta)$$

wo ξ_s, η_s noch zu bestimmende Funktionen von t sind und wo

$$A_s = \left[\frac{\dfrac{\partial F'}{\partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial F'}{\partial x}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2}\right]_{\substack{x = a_s \\ y = b_s}},$$

$$B_s = \left[\frac{\dfrac{\partial F'}{\partial x}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial F'}{\partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2}\right]_{\substack{x = a_s \\ y = b_s}}$$

einzusetzen sind. Nunmehr betrachten wir die 3δ Gleichungen

$$G(\alpha_s, \beta_s) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x}(\alpha_s, \beta_s) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(\alpha_s, \beta_s) = 0. \qquad (s=1,\ldots,\delta)$$

Dieselben nehmen wegen

$$F(a_s, b_s) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(a_s, b_s) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a_s, b_s) = 0, \quad F'(a_s, b_s) = 0, \qquad (s=1,\ldots,\delta)$$

nach Weglassung des Faktors t auf der linken Seite, die Gestalt an

$$\begin{gathered} \Omega(a_s, b_s) + t\Gamma_1 + t^2\Gamma_2 + \ldots = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x}(a_s, b_s) + \xi_s \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a_s, b_s) + \eta_s \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a_s, b_s) + t\Gamma_1' + \ldots = 0, \qquad (s=1,2,\ldots,\delta) \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y}(a_s, b_s) + \xi_s \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a_s, b_s) + \eta_s \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a_s, b_s) + t\Gamma_1'' + \ldots = 0, \end{gathered}$$

wo $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_1', \ldots, \Gamma_1'', \ldots$ ganze rationale Ausdrücke in $u_1, \ldots, u_N$; ξ_s, η_s bedeuten.

Es gilt nun bekanntlich der folgende Satz:[1]

Wenn m Gleichungen von der Gestalt

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m + t\mathfrak{P}_{11}(x_1, \ldots, x_m) + t^2\mathfrak{P}_{12}(x_1, \ldots, x_m) + \ldots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m + t\mathfrak{P}_{m1}(x_1, \ldots, x_m) + t^2\mathfrak{P}_{m2}(x_1, \ldots, x_m) + \ldots = 0 \end{gathered}$$

gegeben sind, wo die linken Seiten Potenzreihen der $m + 1$ Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$, t bedeuten und die Determinante der Coefficienten

[1] Vergl. L. Königsberger, *Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln.* Leipzig 1889. S. 43.

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mm}$ einen von o verschiedenen Wert besitzt, so lassen sich für die Grössen $x_1, \ldots, x_m$ eindeutig bestimmte, nach ganzen Potenzen von t fortschreitende Reihen finden, welche obige m Gleichungen identisch für alle Werte von t befriedigen.

Nach der Voraussetzung des zu beweisenden Hilfssatzes gibt es in der Ebene $N - \delta$ Punkte $P_{\delta+1}, \ldots, P_N$ von der Beschaffenheit, dass durch die N Punkte $P_1, \ldots, P_N$ keine Curve n^{ter} Ordnung sich legen lässt. Die Coordinaten solcher $N - \delta$ Punkte bezeichnen wir bezüglich mit:

$$x = a_{\delta+1}, \ \ldots, \ x = a_N,$$

$$y = b_{\delta+1}, \ \ldots, \ y = b_N.$$

Wir fügen dann den obigen 3δ Gleichungen noch die folgenden $N - \delta$ Gleichungen

$$\Omega(a_s, b_s) = 0 \qquad (s=\delta+1,\ldots,N)$$

hinzu und betrachten in dem so entstehenden Systeme von $N + 2\delta$ Gleichungen die Grösse t als unabhängige Veränderliche und die $N + 2\delta$ Grössen $u_1, \ldots, u_N$; ξ_1, η_1; ξ_2, η_2; $\ldots$; ξ_δ, η_δ als die zu bestimmenden Funktionen von t. Auf dieses Gleichungssystem lässt sich der obige Satz anwenden; denn diese $N + 2\delta$ Gleichungen haben die verlangte Gestalt und die betreffende Determinante der Coefficienten von $u_1, \ldots, u_N$; ξ_1, η_1; ξ_2, η_2; $\ldots$; ξ_δ, η_δ nimmt den Wert an

$$\prod^{s=1,2,\ldots,\delta} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2\right]_{\substack{x=a_s\\ y=b_s}} \cdot \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-1} & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_N^n & a_N^{n-1}b_N & a_N^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Hier haben die δ Faktoren des Produktes Π sämmtlich einen von o verschiedenen Wert, da nach Voraussetzung die Punkte $P_1, \ldots, P_\delta$ für die Curve $F = 0$ gewöhnliche Doppelpunkte mit getrennten Tangenten sind und die N-reihige Determinante ist wegen der zuvor angenommenen Eigenschaft der Punkte $P_1, \ldots, P_N$ ebenfalls eine von o verschiedene Grösse.

Damit haben wir die Coefficienten der Form Ω als Funktionen von t bestimmt und es bleibt nur noch übrig zu zeigen, dass für genügend

kleine Werte t die Curve $G = 0$ ausser den δ Doppelpunkten α_1, β_1; $\ldots$; $\alpha_\delta, \beta_\delta$ keine anderen singulären Punkte besitzt. Dieser Nachweis geschieht, wie folgt. Die Coordinaten der singulären Punkte der Curve $G = 0$ bestimmen sich aus den Gleichungen

$$G = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

und sind daher, wie man leicht durch Elimination erkennt, algebraische Funktionen von t. Besässen also diese 3 Gleichungen für beliebige Werte von t ausser den δ Lösungen $\alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_\delta, \beta_\delta$ noch eine andere gemeinsame Lösung, so müsste dieselbe sich, wie folgt, entwickeln lassen

$$x = a_0 + a_1 t^{\nu_1} + a_2 t^{\nu_2} + \ldots,$$

$$y = b_0 + b_1 t^{\mu_1} + b_2 t^{\mu_2} + \ldots,$$

wo die Exponenten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots,$ positive rationale Zahlen und wo a_1, b_1 von 0 verschieden angenommen werden können. Für $t = 0$ folgt, dass der Punkt $x = a_0, y = b_0$ ein singulärer Punkt der Curve $F = 0$ ist. Nach der im Hilfssatze gemachten Voraussetzung nimmt die Form F' in den singulären Punkten der Curve $F = 0$ einen von 0 verschiedenen Wert an. Es sei $F'(a_0, b_0) = a$. Verlegen wir nun den Anfang des Coordinatensystems in den Punkt $x = a_0, y = b_0$, so nehmen die obigen 3 Gleichungen die Gestalt an

$$\begin{aligned} xy + \ldots + t(a + a'x + a''y + \ldots) + \ldots &= 0, \\ y + \ldots + t(a' + \ldots \qquad\qquad) + \ldots &= 0, \\ x + \ldots + t(a'' + \ldots \qquad\qquad) + \ldots &= 0 \end{aligned}$$

und man überzeugt sich leicht, dass diese Gleichungen durch die Reihen

$$x = a_1 t^{\nu_1} + \ldots, \qquad y = b_1 t^{\mu_1} + \ldots$$

nicht identisch für alle Werte t befriedigt werden können. Damit ist der Beweis für unseren Hilfssatz vollständig erbracht.

Der Hilfssatz ist nach verschiedenen Richtungen hin einer Verallgemeinerung fähig; ich möchte überdies hervorheben, dass derselbe in der Theorie der algebraischen Curven und Flächen zur Erledigung von Existenzfragen wesentliche Dienste leistet.

2.

In diesem Abschnitte werde ich eine ternäre definite irreducible Form G von der Beschaffenheit construiren, dass $G = 0$ eine Curve mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ getrennt liegenden Doppelpunkten darstellt, welche zum Theil reell und isolirt, zum Theil paarweise conjugirt imaginär sind.

Ich nehme zu diesem Zweck an, es sei bereits eine ternäre definite irreducible Form Γ von der $n-2^{\text{ten}}$ Ordnung construirt von der Eigenschaft, dass $\Gamma = 0$ eine Curve mit $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ getrennt liegenden Doppelpunkten darstellt; ferner nehme ich 2 lineare Formen l und l' mit reellen Coefficienten und von der Beschaffenheit an, dass die imaginäre gerade Linie $l + il' = 0$ die Curve $\Gamma = 0$ in $n-2$ getrennt liegenden imaginären Punkten $Q_1, \ldots, Q_{n-2}$ schneidet. Die conjugirt imaginäre Gerade $l - il' = 0$ schneidet dann die Curve $\Gamma = 0$ bezüglich in den $n-2$ conjugirt imaginären Punkten $Q'_1, \ldots, Q'_{n-2}$ und diese letzteren Punkte liegen wiederum alle untereinander und von den Punkten $Q_1, \ldots, Q_{n-2}$ getrennt. Ferner nehme man auf $\Gamma = 0$ irgend $3(n-2)$ paarweise conjugirt imaginäre Punkte $R_1, \ldots, R_{3(n-2)}$ und auf der Geraden $l + il' = 0$ zwei imaginäre Punkte S_1, S_2 an; die zu diesen conjugirt imaginären Punkte S'_1, S'_2 liegen auf der Geraden $l - il' = 0$. Endlich sei P irgend ein ausserhalb der Curven $\Gamma = 0$, $l + il' = 0$, $l - il' = 0$ gelegener reeller Punkt der Ebene. Ich construire jetzt eine Form F' von der n^{ten} Ordnung, welche in den $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ Doppelpunkten von $\Gamma = 0$, ferner in den Punkten $Q_1, \ldots, Q_{n-3}, Q'_1, \ldots, Q'_{n-3}, R_1, \ldots, R_{3(n-2)}, S_1, S_2, S'_1, S'_2$, in dem Punkte P und in dem Schnittpunkte der beiden Geraden $l = 0$, $l' = 0$ verschwindet. Eine solche Form existirt stets, da die Gesammtzahl der angegebenen Punkte gleich $\frac{1}{2}n(n+3)$ ist. Die Form F' nimmt

in den beiden Punkten Q_{n-2}, Q'_{n-2} einen von o verschiedenen Wert an; denn im entgegengesetzten Falle würde die Curve $F' = 0$ mit der Curve $\Gamma = 0$ mehr als $n(n-2)$ Punkte und mit den Geraden $l + il' = 0$, $l - il' = 0$ mehr als n Punkte gemein haben und folglich müsste die Form F' mit der Form $F = (l^2 + l'^2)\Gamma$ bis auf einen constanten Faktor übereinstimmen. Dies ist aber nicht der Fall, da die letztere Form F im Punkte P einen von o verschiedenen Wert hat, die Form F' dagegen im Punkte P verschwindet.

Wir wenden jetzt den in Abschnitt 1 bewiesenen Hilfssatz auf die Curve $F' = 0$ an. Diese Curve hat die $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ Doppelpunkte von $\Gamma = 0$, ferner die Punkte $Q_1, \ldots, Q_{n-2}$, $Q'_1, \ldots, Q'_{n-2}$ und ausserdem den Punkt $l = 0$, $l' = 0$ zu gewöhnlichen Doppelpunkten mit getrennten Tangenten. Die Form F' verschwindet in diesen sämmtlichen Punkten, ausgenommen in den beiden Punkten Q_{n-2}, Q'_{n-2}. Es giebt daher nach jenem Satze eine Curve $G = 0$ von der nämlichen Ordnung n, welche in der Umgebung der Doppelpunkte von $\Gamma = 0$, der Punkte $Q_1, \ldots, Q_{n-3}$, $Q'_1, \ldots, Q'_{n-3}$ und des Punktes $l = 0$, $l' = 0$ je einen gewöhnlichen Doppelpunkt mit getrennten Tangenten besitzt, sonst aber keinen Doppelpunkt aufweist. Die Zahl der Doppelpunkte der Curve $G = 0$ ist daher genau gleich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Die Form G ist für hinreichend kleine Werte des Parameters t eine definite Form. Denn hätte die Curve $G = 0$ einen reellen Zug, so müsste dieser für $t = 0$ sich in einen reellen isolirten Doppelpunkt der Curve $F = 0$ zusammenziehen. Andererseits kann für jede um einen solchen Doppelpunkt abgegrenzte Umgebung ein von o verschiedener Wert von t gefunden werden, so dass die diesem Werte t entsprechende Form G in jener Umgebung positiv oder null ist. Man sieht dies leicht ein, wenn man den Mittelpunkt des Coordinatensystems in den variirenden Doppelpunkt verlegt.

Dass die erhaltene Form G für beliebige, zwischen gewissen Grenzen liegende Werthe von t irreducibel ist, kann durch folgende Betrachtung gezeigt werden. Wir denken uns durch die Gleichung $G = 0$ die Grösse y als algebraische Funktion von x bestimmt und dann über der complexen x-Ebene die zu dieser Funktion y zugehörige Riemannsche Fläche con-

struirt. Für $t = 0$ zerfällt diese Riemannsche Fläche in 3 getrennte den Gleichungen $\Gamma = 0$, $l + il' = 0$, $l - il' = 0$ entsprechende Theile: der erste der Gleichung $\Gamma = 0$ entsprechende Theil bedeckt die complexe x-Ebene $(n-2)$-fach und ist wegen der Irreducibilität jener Gleichung in sich zusammenhängend; die beiden anderen Theile bedecken die x-Ebene je einfach. Lassen wir nun den Parameter t von 0 an wachsen, so werden die Doppelpunkte Q_{n-2}, Q'_{n-2} aufgelöst und in folge dessen erhalten die beiden letzteren Theile je 2 Verzweigungspunkte, welche dieselben mit dem ersteren Theile zu einer einzigen in sich zusammenhängenden Riemannschen Fläche verbinden. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Wir haben jetzt eine irreducible definite Form G von der Eigenschaft gefunden, dass die Gleichung $G = 0$ eine Curve mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ gewöhnlichen getrennt liegenden Doppelpunkten darstellt.

3.

In diesem Abschnitt wollen wir die soeben construirte Form G als Bruch darstellen, dessen Zähler gleich der Summe von 3 Formenquadraten ist.

Zu dem Zwecke wählen wir auf der Curve $G = 0$ irgend $n-4$ getrennt liegende und paarweise conjugirt imaginäre Punkte $A_1, \dots, A_{n-4}$ aus und bilden dann 3 von einander linear unabhängige Formen $\rho, \sigma, \varkappa$ von der $n-2^{\text{ten}}$ Ordnung und mit reellen Coefficienten, welche in den $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten und in den $n-4$ Punkten A_1, $\dots, A_{n-4}$ verschwinden. Dies ist stets möglich, da die Zahl der auferlegten Bedingungen gerade um 3 kleiner ist, als die Zahl der Coefficienten einer Form von der $n-2^{\text{ten}}$ Ordnung. Wenn wir nunmehr die Curve $G(x, y, z) = 0$ vermöge der Formeln

$$\xi : \eta : \zeta = \rho(x, y, z) : \sigma(x, y, z) : \varkappa(x, y, z)$$

transformiren, so erhalten wir eine Gleichung von der Gestalt $g(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Hier ist g eine irreducible quadratische Form von ξ, η, ζ, da unter den $n(n-2)$ Schnittpunkten der beiden Curven $G = 0$ und $u\rho + v\sigma + w\varkappa = 0$

nur 2 mit den unbestimmten Parametern u, v, w veränderliche Punkte vorhanden sind. Die Ausführung der Transformation ergiebt Formeln von der Gestalt

$$x : y : z = r(\xi, \eta, \zeta) : s(\xi, \eta, \zeta) : k(\xi, \eta, \zeta),$$

wo r, s, k Formen der Veränderlichen ξ, η, ζ mit reellen Coefficienten sind. Hieraus folgt, dass g eine definite Form ist; denn wäre $g(\xi, \eta, \zeta) = 0$ die Gleichung eines reellen Kegelschnittes, so würden sich durch Berechnung der Formen r, s, k unendlich viele reelle Wertsysteme x, y, z ergeben, für welche G verschwindet. Die Form g gestattet daher eine Darstellung von der Gestalt

$$g(\xi, \eta, \zeta) = (c_1\xi + d_1\eta + e_1\zeta)^2 + (c_2\xi + d_2\eta + e_2\zeta)^2 + (c_3\xi + d_3\eta + e_3\zeta)^2,$$

wo c, d, e reelle Constanten sind, deren Determinante von 0 verschieden ist.

Wenn wir nun in der Form g statt der Veränderlichen ξ, η, ζ die Formen ρ, σ, χ einsetzen, so entsteht eine Form von der $2n - 4^{\text{ten}}$ Ordnung in x, y, z, welche die Form G als Faktor enthält. Wir setzen

$$g(\rho, \sigma, \chi) = h(x, y, z)\, G(x, y, z),$$

wo h eine definite Form von der $n - 4^{\text{ten}}$ Ordnung in x, y, z bedeutet.

Die 9 reellen Constanten c, d, e sind noch zum Theil willkürlich: man wähle die 3 Constanten c_1, d_1, e_1 derart, dass die Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung $c_1\rho + d_1\sigma + e_1\chi = 0$ aus der Curve $G = 0$ ausser jenen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten und den $n-4$ festen Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ zwei von diesen und unter einander getrennt liegende Punkte A und B ausschneidet.

Setzen wir der Kürze wegen

$$c_1\rho + d_1\sigma + e_1\chi = P(x, y, z),$$
$$c_2\rho + d_2\sigma + e_2\chi = \Sigma(x, y, z),$$
$$c_3\rho + d_3\sigma + e_3\chi = K(x, y, z),$$

so erhalten wir:

$$hG = P^2 + \Sigma^2 + K^2.$$

Aus dieser Formel sieht man unmittelbar, dass die Form h in den $n - 4$ Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ verschwindet; ausserdem ist für die weitere Entwicklung der Umstand wesentlich, dass h in den Doppelpunkten der Curve $G = 0$ nicht verschwindet. Um das letztere zu beweisen nehmen wir das Gegentheil an und verlegen den Anfang des Coordinatensystems in den betreffenden Doppelpunkt, für welchen $h = 0$ ist. Dann haben die in Betracht kommenden Formen die Gestalt

$$h = h_1 x + h_2 y + \ldots,$$
$$G = G_{11}x^2 + 2G_{12}xy + G_{22}y^2 + \ldots,$$
$$P = P_1 x + P_2 y + \ldots,$$
$$\Sigma = \Sigma_1 x + \Sigma_2 y + \ldots,$$
$$K = K_1 x + K_2 y + \ldots,$$

wo nur die Glieder niedrigster Ordnung in x, y hingeschrieben sind. Aus der obigen Identität folgt leicht

$$(P_1 x + P_2 y)^2 + (\Sigma_1 x + \Sigma_2 y)^2 + (K_1 x + K_2 y)^2 = 0$$

und hieraus wiederum ergiebt sich, dass die 3 linearen Formen

$$P_1 x + P_2 y, \qquad \Sigma_1 x + \Sigma_2 y, \qquad K_1 x + K_2 y$$

entweder identisch 0 sind oder sich unter einander nur um einen constanten Faktor unterscheiden. Wir können daher jedenfalls aus den Formen P, Σ, K 2 lineare Combinationen Π_1, Π_2 herstellen, welche keine Glieder erster Ordnung in x, y enthalten. Dann wählen wir auf $G = 0$ einen beliebigen Punkt P und bestimmen die Constanten λ_1, λ_2 so, dass die Form $\Pi = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2$ im Punkte P verschwindet. Die Curve $\Pi = 0$ besitzt dann in dem Anfangspunkte des Coordinatensystems einen Doppelpunkt und geht ausserdem durch die übrigen Doppelpunkte der Curve $G = 0$ und durch die Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, P$ je einfach hindurch; sie würde daher die Curve $G = 0$ in mehr als $n(n - 2)$ Punkten schneiden, was unmöglich ist. Die Annahme derzufolge h in jenem Doppelpunkte verschwindet ist daher unzulässig.

Wir haben in diesem Abschnitte gezeigt, dass die in Abschnitt 2 construirte Form G die Darstellung

$$G = \frac{P^2 + \Sigma^2 + K^2}{h}$$

gestattet, wo P, Σ, K Formen $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung mit reellen Coefficienten bedeuten, welche in den $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten und ausserdem in den $n-4$ paarweise conjugirt imaginären Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ der Curve $G=0$ verschwinden. Ausserdem ist h eine Form $n-4^{\text{ter}}$ Ordnung, welche in jenen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten von 0 verschieden ist, dagegen in den $n-4$ Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ verschwindet. Die Curve $P=0$ schneidet auf $G=0$ noch die beiden weiteren einander conjugirt imaginären Punkte A, B aus, in welchen h von 0 verschieden angenommen werden kann.

4.

Die Form G ist eine Form mit verschwindender Diskriminante. Wir werden jetzt mit Hilfe dieser Form G eine Form f mit nicht verschwindender Diskriminante construiren, welche die nämliche Darstellung wie G gestattet.

Aus den am Schlusse des vorigen Abschnittes angestellten Betrachtungen folgt, dass für einen Doppelpunkt der Curve $G=0$ die 3 Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial x} & \frac{\partial \Sigma}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial K}{\partial x} & \frac{\partial K}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} & \frac{\partial \Sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial K}{\partial x} & \frac{\partial K}{\partial y} \end{vmatrix}$$

nicht sämmtlich verschwinden und es ist daher möglich, 3 quadratische Formen p, q, m zu bestimmen von der Beschaffenheit, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & p \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial x} & \frac{\partial \Sigma}{\partial y} & q \\ \frac{\partial K}{\partial x} & \frac{\partial K}{\partial y} & m \end{vmatrix}$$

eine Funktion wird, welche in sämmtlichen Doppelpunkten von $G = 0$ einen von 0 verschiedenen Wert annimmt. Wir setzen nun

$$\varphi = P + thp,$$
$$\psi = \Sigma + thq,$$
$$\chi = K + thm,$$
$$f = G + 2t(Pp + \Sigma q + Km) + t^2h(p^2 + q^2 + m^2)$$

und haben dann infolge der Formel für G die Identität

$$hf = \varphi^2 + \psi^2 + \chi^2,$$

wo die Formen $h, f, \varphi, \psi, \chi$ offenbar sämmtlich in den Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ gleich 0 sind.

Um den Nachweis zu führen, dass die Form f für beliebige zwischen gewissen Grenzen liegende Werte von t eine von 0 verschiedene Diskriminante besitzt, nehmen wir im Gegentheile an, es gebe für beliebige t stets ein Wertepaar x, y, welches den Gleichungen

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

genügt. Durch Elimination erkennt man leicht, dass die Lösungen x, y algebraische Funktionen von t sind und daher eine Entwicklung von der Gestalt

$$x = a_0 + a_1t^{\nu_1} + a_2t^{\nu_2} + \ldots,$$
$$y = b_0 + b_1t^{\mu_1} + b_2t^{\mu_2} + \ldots,$$

gestatten würden, wo die Exponenten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots,$ positive rationale Zahlen sind und wo a_1, b_1 von 0 verschieden angenommen werden können. Für $t = 0$ folgt, dass der Punkt $x = a_0, y = b_0$ ein Doppelpunkt der Curve $G = 0$ ist. Verlegen wir den Anfang des Coordinatensystems in diesen Doppelpunkt, so erhalten die in Betracht kommenden Formen die Gestalt

$$G = G_{11}x^2 + 2G_{12}xy + G_{22}y^2 + \ldots,$$
$$Pp + \Sigma q + Km = C_1x + C_2y + \ldots,$$
$$h(p^2 + q^2 + m^2) = c_0 + \ldots$$

und es wird folglich

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = G_{11}x + G_{12}y + C_1 t + \dots,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = G_{12}x + G_{22}y + C_2 t + \dots,$$

$$f - \frac{x}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = C_1 xt + C_2 yt + c_0 t^2 + \dots,$$

wo rechter Hand nur die Glieder niedrigster Ordnung in x, y, t hingeschrieben sind. Damit nun diese 3 Ausdrücke nach Einsetzung der Werte

$$x = a_1 t^{\nu_1} + \dots, \qquad y = b_1 t^{\nu_1} + \dots$$

identisch für alle t verschwinden, ist es, wie man leicht zeigt, nothwendig, dass jene Reihen für x, y nach *ganzen* Potenzen von t fortschreiten und dass die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & C_1 \\ G_{12} & G_{22} & C_2 \\ C_1 & C_2 & c_0 \end{vmatrix}$$

den Wert 0 hat.

Zur Berechnung der Determinante Δ setzen wir

$$P = P_1 x + P_2 y + \dots, \qquad p = p_0 t + \dots,$$

$$\Sigma = \Sigma_1 x + \Sigma_2 y + \dots, \qquad q = q_0 t + \dots,$$

$$K = K_1 x + K_2 y + \dots, \qquad m = m_0 t + \dots,$$

$$h = h_0 + \dots,$$

wo h_0 wegen der früher bewiesenen Eigenschaft der Form h von 0 verschieden ist. Aus der Formel

$$hG = P^2 + \Sigma^2 + K^2$$

folgt

$$h_0 G_{11} = P_1^2 + \Sigma_1^2 + K_1^2,$$

$$h_0 G_{12} = P_1 P_2 + \Sigma_1 \Sigma_2 + K_1 K_2,$$

$$h_0 G_{22} = P_2^2 + \Sigma_2^2 + K_2^2$$

und die Determinante Δ ist daher bis auf den Faktor h_0 gleich der Diskriminante der quadratischen Form

$$(P_1 X + P_2 Y + h_0 p_0 T)^2 + (\Sigma_1 X + \Sigma_2 Y + h_0 q_0 T)^2 + (K_1 X + K_2 Y + h_0 m_0 T)^2;$$

diese Diskriminante ist aber bis auf den Faktor h_0 gleich dem Quadrat der Determinante

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & p_0 \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 & q_0 \\ K_1 & K_2 & m_0 \end{vmatrix},$$

welche ihrerseits infolge der vorhin getroffenen Wahl der quadratischen Formen p, q, m eine von o verschiedene Zahl darstellt. Wir sind somit auf einen Widerspruch geführt und hieraus folgt die Unzulässigkeit unserer Annahme, der zufolge die Diskriminante der Form f für alle Werte t verschwinden sollte.

Wir kehren zu den im vorigen Abschnitte construirten Formen zurück. Da die Form P im Punkte A verschwindet, so wird eine der beiden Formen $\Sigma + iK$ oder $\Sigma - iK$ ebenfalls in A gleich o; es sei dies etwa die Form $\Sigma + iK$. Dann wird zugleich die conjugirt imaginäre Form $\Sigma - iK$ in dem zu A conjugirt imaginären Punkte B gleich o und die Form $\Sigma + iK$ hat nothwendig in B, die Form $\Sigma - iK$ in A einen von o verschiedenen Wert; denn im entgegengesetzten Falle müssten Σ und K in A verschwinden und da h in A von o verschieden ist, so würde folgen, dass die Curve $G = 0$ in A einen Doppelpunkt besitzt, was nicht der Fall ist.

Wir beweisen ferner, dass die Curve $\Sigma + iK = 0$ die Curve $G = 0$ in A berührt. Zu dem Zwecke verlegen wir den Anfang des Coordinatensystems in den Punkt A und wählen die Tangente von $G = 0$ im Punkte A zur y-Achse; die in Betracht kommenden Formen nehmen dann die Gestalt an

$$P = P_1 x + P_2 y + \dots, \qquad G = G_1 x + \dots,$$

$$\Sigma + iK = T_1 x + T_2 y + \dots, \qquad h = h_0 + \dots,$$

$$\Sigma - iK = T_0' + \dots \qquad ,$$

wo T'_0, G_1, h_0 von o verschiedene Zahlen sind. Aus der Relation

$$hG = P^2 + (\Sigma + iK)(\Sigma - iK)$$

folgt $T_2 = 0$, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Die Formen f, φ, ψ, χ enthalten noch die Veränderliche t. Durch Wahl eines genügend kleinen Wertes für t können wir offenbar erreichen, dass die Schnittpunkte der Curve $f = 0$ mit den Curven $\psi + i\chi = 0$, $\psi - i\chi = 0$ in beliebige Nähe der bezüglichen Schnittpunkte der Curve $G = 0$ mit den Curven $\Sigma + iK$, $\Sigma - iK = 0$ fallen, wobei die Entfernung zweier Punkte etwa durch die Summe der absoluten Beträge der Coordinatendifferenzen gemessen werden möge. Wir grenzen nun unter Zugrundelegung eben derselben Definition der Entfernung um die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte von $G = 0$ je ein so kleines Gebiet ab, dass h in jedem Punkte dieser Gebiete von o verschieden ist, und dass ausserdem keine Form von der $n - 3^{\text{ten}}$ Ordnung existirt, welche in jedem dieser $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Gebiete eine Nullstelle besitzt. Dass letzteres stets möglich ist, geht aus dem Umstande hervor, dass es keine Curve $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung giebt, welche durch die sämmtlichen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte von $G = 0$ hindurch geht. Ausserdem grenze man auch um die beiden Punkte A, B je ein Gebiet ab, in welchem h von o verschieden ist. Nun wähle man t so klein, dass die Schnittpunkte der Curven $\psi + i\chi = 0$ und $\psi - i\chi = 0$ mit der Curve $f = 0$ sämmtlich in die abgegrenzten Gebiete fallen, abgesehen von den $n - 4$ Schnittpunkten A_1, $\ldots$, A_{n-4}, welche fest bleiben. Berücksichtigen wir dann die Identität

$$pf = \varphi^2 + \psi^2 + \chi^2$$

und die Thatsache, dass $f = 0$ keinen Doppelpunkt besitzt, so erhalten wir durch eine ähnliche Schlussweise, wie sie kurz zuvor angewandt worden ist, das folgende Resultat: die Curve $\psi + i\chi = 0$ berührt die Curve $f = 0$ in einem Punkte des um A abgegrenzten Gebietes und in je einem Punkte derjenigen Gebiete, welche um die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte von $G = 0$ abgegrenzt sind; wir bezeichnen die Berührungspunkte bezüglich

mit $A, U_1, \ldots, U_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$. Die Curve $\psi - i\chi = 0$ berührt die Curve $f = 0$ in einem Punkte des um B abgegrenzten Gebietes und in je einem Punkte der um die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte abgegrenzten Gebiete; wir bezeichnen die Berührungspunkte bezüglich mit $B, V_1, \ldots, V_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$.

Somit haben wir eine definite Form f mit nicht verschwindender Diskriminante construirt, welche die Darstellung

$$f = \frac{\varphi^2 + \psi^2 + \chi^2}{h}$$

gestattet; dabei sind φ, ψ, χ Formen von der $n - 2^{\text{ten}}$ Ordnung mit reellen Coefficienten und mit den folgenden Eigenschaften: die Curven $\varphi = 0, \psi = 0, \chi = 0$ haben mit der Curve $f = 0$ gewisse $n - 4$ paarweise conjugirt imaginäre Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}$ gemein; die Curve $\psi + i\chi = 0$ berührt ausserdem die Curve $f = 0$ in den $1 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ imaginären Punkten $A, U_1, \ldots, U_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$; die Curve $\psi - i\chi = 0$ berührt $f = 0$ in den conjugirt imaginären Punkten $B, V_1, \ldots, V_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$; die Curve $\varphi = 0$ schneidet die Curve $f = 0$ noch in den weiteren Punkten $A, U_1, \ldots, U_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}, B, V_1, \ldots, V_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$. Sämmtliche in Betracht gezogene Punkte liegen von einander getrennt und die Berührungspunkte $U_1, \ldots, U_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$, sowie die Berührungspunkte $V_1, \ldots, V_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$ liegen nicht auf einer Curve $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung.

5.

In den nun folgenden Abschnitten werden wir sowohl die Coefficienten der eben construirten Form f, als auch die auf der Curve $f = 0$ gelegenen Punkte A, B, U, V einer stetigen Veränderung unterwerfen und zwar derart, dass dabei die sämmtlichen Coefficienten von f und die Coordinaten der Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$ als die unabhängigen Veränderlichen, dagegen die Coordinaten der Punkte $U_1, \ldots, U_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$ als Funktionen jener unabhängigen Veränderlichen betrachtet werden. Dabei benutzen wir einige Thatsachen aus der Theorie der Abelschen Funktionen, welche sich für unseren Zweck, wie folgt, aussprechen lassen.

Es sei F eine beliebige Form von der n^{ten} Ordnung mit reellen Coefficienten und von nicht verschwindender Diskriminante. Durch die Gleichung $F = 0$ wird y als algebraische Funktion von x definirt. Da die Curve $F = 0$ keinen Doppelpunkt besitzt, so hat das Geschlecht derselben den Wert

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Die p überall endlichen Integrale der Curve haben die Gestalt

$$w = \int \frac{x^\mu y^\nu}{\frac{\partial F}{\partial x}} dx,$$

wo die Summe der Exponenten μ, ν die Zahl $n-3$ nicht überschreitet.

Für unseren Zweck kommt das Problem in Betracht, eine Curve von der $n-2^{\text{ten}}$ Ordnung zu construiren, welche die gegebene Curve $F = 0$ in den gegebenen Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ schneidet, in dem ebenfalls gegebenen Punkte A berührt und endlich in p weiteren zu bestimmenden Punkten berührt. Dieses Problem führt auf eine Theilungsaufgabe; dasselbe ist daher mit Hilfe des Jacobischen Umkehrproblems lösbar.

Es seien p bestimmte überall endliche Integrale nach der von Riemann angegebenen Vorschrift ausgewählt; wir bezeichnen dieselbe mit $w_1, \ldots, w_p$ und verstehen allgemein unter $w(P)$ den Wert eines solchen Integrals im Punkte P.

I. Sind dann $P_1, \ldots, P_{n(n-2)}$ die Schnittpunkte irgend einer Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Curve $F = 0$, so ist nach dem Abelschen Theorem

$$w_s(P_1) + \cdots + w_s(P_{n(n-2)}) \equiv \beta_s, \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

wo $\beta_1, \ldots, \beta_p$ gewisse Summen von überall endlichen Integralen bedeuten, welche nicht von den Punkten $P_1, \ldots, P_{n(n-2)}$, sondern nur von den Coefficienten der Form F abhängen.

Aus der Umkehrung des Abelschen Theorems ergiebt sich ferner der folgende Satz:

II. Wenn für $n(n-2)$ Punkte $P_1, \ldots, P_{n(n-2)}$ der Curve $F = 0$ die in Satz I angegebenen Congruenzen erfüllt sind, so können diese durch eine Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden.

Wir verstehen im Folgenden unter $w(x)$ den Wert, welchen das Integral w in dem Punkte mit den Coordinaten x, y annimmt. Es gelten dann für die zu unserem algebraischen Gebilde zugehörige Funktion θ von p Veränderlichen die folgenden Sätze:

III. Wenn die p Punkte $U_1, \ldots, U_p$ *nicht* auf einer Curve $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, so verschwindet die Funktion

$$\theta[w_1(x) - w_1(U_1) - \ldots - w_1(U_p), \ldots, w_p(x) - w_p(U_1) - \ldots - w_p(U_p)]$$

nicht identisch für alle Werte von x.

IV. Wenn die obige Funktion θ nicht identisch für alle Werte von x verschwindet, so hat sie, als Funktion von x betrachtet, die p Punkte $U_1, \ldots, U_p$ und nur diese zu Nullstellen, und wenn man dann in jener Funktion θ die Werte

$$w_s(U_1) + \ldots + w_s(U_p) \equiv \frac{\beta_s}{2} - \frac{1}{2}[w_s(A_1) + \ldots + w_s(A_{n-4})] - w_s(A) \quad {\scriptstyle (s=1,2,\ldots,p)}$$

einsetzt, so sind die p Nullstellen die Berührungspunkte einer Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $F = 0$ in den gegebenen Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ schneidet und in dem gegebenen Punkte A berührt.

V. Die Funktion θ verschwindet identisch, wenn es möglich ist, in jeder beliebig kleinen Umgebung der p Punkte $U_1, \ldots, U_p$ andere p Punkte $U_1', \ldots, U_p'$ zu finden von der Art, dass diese ebenfalls Berührungspunkte einer Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung sind, welche $F = 0$ in den gegebenen Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ schneidet und in dem gegebenen Punkte A berührt.

VI. Umgekehrt wenn die obige Funktion θ identisch für alle Werte von x verschwindet, so giebt es in beliebiger Nähe der Punkte $U_1, \ldots, U_p$ stets p andere Punkte $U_1', \ldots, U_p'$ von der Art, dass die letzteren die Berührungspunkte einer durch $A_1, \ldots, A_{n-4}$ hindurch gehenden und in A berührenden Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung sind.

6.

Mit Hilfe der angeführten Sätze lässt sich die stetige Änderung der Coefficienten der Form f in der Weise vollziehen, wie dies am Anfang des vorigen Abschnittes in Aussicht genommen worden ist. Zu dem Zwecke bilden wir für die besondere Form f die Funktion

$$\theta[w_1(x) - w_1(U_1) - \ldots - w_1(U_p), \ldots, w_p(x) - w_p(U_1) - \ldots - w_p(U_p)]$$

und denken uns darin die auf die Punkte U bezüglichen Integralsummen durch die bekannten Grössen ersetzt, in der Weise, wie dies in Satz IV des vorigen Abschnittes geschehen ist. Da nach der in Abschnitt 4 ausgeführten Construction von f die p Berührungspunkte $U_1, \ldots, U_p$ nicht auf einer Curve $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, so ist nach Satz III des vorigen Abschnittes die Funktion θ nicht identisch für alle Werte von x gleich 0. Die Funktion θ besitzt daher nach Satz IV nur in den p Punkten $U_1, \ldots, U_p$ den Wert 0. Die Perioden und Argumente der Funktion θ setzen sich in bestimmt vorgeschriebener Weise aus den zur Curve $f = 0$ gehörigen überall endlichen Integralen zusammen. Wenn wir daher die Coefficienten der Form f und die gegebenen Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$ einer stetigen Änderung unterwerfen, so ändern sich auch die Perioden und Argumente der Funktion θ stetig, solange nur die Diskriminante der Form f nicht 0 wird. Es lässt sich nun die Funktion θ nach Potenzen der Perioden und Argumente entwickeln und nach einem bekannten Satze von WEIERSTRASS[1] sind folglich auch die Nullstellen der Funktion θ stetige Funktionen der Perioden und Argumente. Damit ist gezeigt, dass diese Nullstellen ebenfalls sich stetig ändern, wenn man die Coefficienten der Form f und die gegebenen Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$ einer stetigen Änderung unterwirft.

Die Nullstellen $U_1, \ldots, U_p$ der Funktion θ sind, wie eben ausgeführt worden ist, die Berührungspunkte einer Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung. Da

[1] Vgl. die Abhandlung: *Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze.* Abschnitt 1.

durch diese p Berührungspunkte und durch die gegebenen Punkte A_1, $\ldots, A_{n-4}, A$ die Berührungscurve $\psi + i\chi = 0$ völlig bestimmt ist, so folgt, dass auch die Coefficienten der Form $\psi + i\chi$ bei jener stetigen Änderung selber eine stetige Änderung erfahren und das gleiche gilt daher auch von den Coefficienten der Formen ψ und χ.

Es kommt nun wesentlich darauf an, zu zeigen, dass jede durch stetige Änderung aus f entstehende Form F eine ebensolche Darstellung gestattet, wie die Form f. Um diesen Beweis zu führen, construiren wir zunächst aus den p Nullstellen der Funktion θ für die Curve $F = 0$ die bezügliche Berührungscurve; es sei $\Psi + iX = 0$ die Gleichung dieser Berührungscurve; dabei müssen die $n - 4$ einfachen Schnittpunkte dieser Berührungscurve mit $F = 0$ paarweise conjugirt imaginär gewählt sein; wir bezeichnen dieselben wiederum mit $A_1, \ldots, A_{n-4}$. Die Berührungspunkte heissen wiederum $A, U_1, \ldots, U_p$ und die zu diesen conjugirt imaginären Punkte $B, V_1, \ldots, V_p$ sind dann offenbar diejenigen Punkte, in welchen die ebenfalls durch $A_1, \ldots, A_{n-4}$ hindurch gehende Curve $\Psi - iX = 0$ die Curve $F = 0$ berührt.

Nach Satz I ist

$$w_s(A_1) + \ldots + w_s(A_{n-4}) + 2[w_s(A) + w_s(U_1) + \ldots + w_s(U_p)] \equiv \beta_s,$$

$$w_s(A_1) + \ldots + w_s(A_{n-4}) + 2[w_s(B) + w_s(V_1) + \ldots + w_s(V_p)] \equiv \beta_s \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

und wenn man diese beiden Formeln addirt und die so entstehende Congruenz durch 2 dividirt, so wird

$$w_s(A_1) + \ldots + w_s(A_{n-4}) + w_s(A) + w_s(U_1) + \ldots + w_s(U_p)$$

$$+ w_s(B) + w_s(V_1) + \ldots + w_s(V_p) \equiv \beta_s + \frac{\varepsilon}{2} \Pi_s, \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

wo $\Pi_1, \ldots, \Pi_p$ ein Periodensystem ist und wo ε entweder 0 oder 1 bedeutet. Um zu entscheiden, welcher von diesen beiden Fällen eintritt, beachten wir, dass die auf $f = 0$ gelegenen Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$, $U_1, \ldots, U_p, B, V_1, \ldots, V_p$ sämmtlich durch eine Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ord-

nung, nämlich durch die Curve $\varphi = 0$ ausgeschnitten werden und dass daher nach Satz I

$$w_s(A_1) + \dots + w_s(A_{n-4}) + w_s(A) + w_s(U_1) + \dots + w_s(U_p)$$
$$+ w_s(B) + w_s(V_1) + \dots + w_s(V_p) \equiv \beta_s \qquad (s=1,2,\dots,p)$$

ist. Da aber durch stetige Änderung der Coefficienten der Form F und der Coordinaten der Punkte $A_1, \dots, A_{n-4}, A$ die obige Formel in diese letztere übergeführt wird und die Perioden $\Pi_1, \dots, \Pi_p$ bei dieser Änderung nicht sämmtlich verschwinden können, so folgt, dass in der ersteren Formel ε den Wert 0 hat, und nach Satz II können daher die auf $F = 0$ gelegenen Punkte $A_1, \dots, A_{n-4}, A, U_1, \dots, U_p, B, V_1, \dots, V_p$ ebenfalls durch eine Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden; dieselbe sei durch die Gleichung $\Phi = 0$ dargestellt, wo Φ eine Form $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung mit reellen Coefficienten bedeutet.

Jede der beiden Curven $\Phi^2 = 0$ und $\Psi^2 + X^2 = 0$ schneidet die Curve $F = 0$ in den $n(n-2)$ Punkten $A_1, \dots, A_{n-4}, A, U_1, \dots, U_p, B, V_1, \dots, V_p$ und zwar zählt offenbar jeder dieser Punkte als 2-facher Schnittpunkt. Bestimmen wir daher die Constante λ derart, dass die Form $\lambda\Phi^2 + \Psi^2 + X^2$ mit der Form F noch eine weitere Nullstelle gemein hat, so wird jene Form $\lambda\Phi^2 + \Psi^2 + X^2$ nothwendig die Form F als Faktor enthalten. Dabei ist die Constante λ eine reelle Zahl; denn wäre sie complex und bezeichnen wir ihren conjugirt imaginären Werth mit λ', so folgt, dass auch zugleich die Form $\lambda'\Phi^2 + \Psi^2 + X^2$ durch F theilbar sein müsste, was offenbar nicht zutrifft. Nehmen wir ferner die Quadratwurzel aus dem absoluten Wert von λ mit in die Bezeichnung der Form Φ auf, so erhalten wir eine Relation von der Gestalt

$$HF = \pm\, \Phi^2 + \Psi^2 + X^2.$$

Da wir durch stetige Änderung der Coefficienten von F, Φ, Ψ, X nothwendigerweise wieder zu den bezüglichen Coefficienten der Formen f, φ, ψ, χ, zurück gelangen können und zwischen diesen letzteren Formen die Relation

$$hf = \varphi^2 + \psi^2 + \chi^2$$

besteht, so muss auch in der obigen Formel das positive Vorzeichen gelten, und wir haben somit gezeigt, dass die Form F die Darstellung

$$F = \frac{\Phi^2 + \Psi^2 + X^2}{H}$$

gestattet. Dabei ist F eine Form mit reellen Coefficienten, welche aus der Form f durch beliebige stetige Änderung der Coefficienten entstanden ist, mit der Einschränkung jedoch, dass bei der vorgenommenen Änderung keine Form auftritt, deren Diskriminante gleich o ist oder für welche die betreffende Funktion θ identisch für alle Werte von x verschwindet.

7.

Wir untersuchen in diesem Abschnitte, unter welchen Umständen aus der Form f durch stetige Veränderung der Coefficienten eine Form entstehen kann, für welche die betreffende Funktion θ identisch verschwindet. Für diese Untersuchung brauchen wir einen Hilfssatz aus der Theorie der Elimination, der wie folgt lautet:

Es seien m Gleichungen von der Gestalt

$$G_1(x, y, \ldots, p, q, \ldots) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$G_m(x, y, \ldots, p, q, \ldots) = 0$$

vorgelegt, wo $G_1, \ldots, G_m$ ganze rationale Funktionen der Unbekannten $x, y, \ldots$ und der Parameter $p, q, \ldots$ sind. Diese Gleichungen seien für $x = 0, y = 0, \ldots, p = 0, q = 0, \ldots$ erfüllt und es gebe ferner eine positive Grösse δ von der Art, dass allemal, wenn die Werte der Parameter $p, q, \ldots,$ absolut genommen die Grösse δ nicht überschreiten, ein und nur ein System von Grössen $x, y, \ldots$ gefunden werden kann, welche jene Gleichungen befriedigen und deren absolute Beträge ebenfalls sämmtlich die Grösse δ nicht überschreiten: dann sind nothwendig die Grössen $x, y, \ldots$ algebraische Funktionen der Parameter $p, q, \ldots$ d. h. jede der Funktionen $x, y, \ldots$ genügt einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rational von $p, q, \ldots$ abhängen.

Der Beweis bietet keine wesentliche Schwierigkeit; ich gehe jedoch auf denselben hier nicht näher ein.

Mit Hilfe des eben ausgesprochenen Satzes lässt sich der Beweis führen, dass die Coordinaten der Berührungspunkte $U_1, \ldots, U_p$ algebraische Funktionen der Coefficienten der Form F und der Coordinaten der Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$ sind. In der That wenn man die Bedingungen dafür aufstellt, dass $U_1, \ldots, U_p$ die Berührungspunkte einer Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung sind, welche die Curve $F = 0$ in den gegebenen Punkten A_1, $\ldots, A_{n-4}$ schneidet und in dem gegebenen Punkte A berührt, so erhält man ein System von algebraischen Gleichungen; und wenn wir dann die Coefficienten der Form F und die Coordinaten der Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}$, A stetig ändern lassen, so entspricht jedem dadurch entstehenden Systeme von Coefficienten und Coordinaten eine bestimmte Funktion θ, deren Nullstellen eben jene Berührungspunkte darstellen. Somit sind unter Berücksichtigung der Sätze IV und V in Abschnitt 5 alle Bedingungen unseres Hülfssatzes erfüllt und es folgt daher aus demselben, dass die Coordinaten der Berührungspunkte $U_1, \ldots, U_p$ algebraischen Gleichungen genügen, deren Coefficienten ganze rationale Funktionen von den gegebenen Grössen, nämlich von den Coordinaten der Form F und den Coordinaten der Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$ sind. Wir denken uns diese algebraischen Gleichungen aufgestellt und nehmen an, dass die Coefficienten dieser Gleichungen nicht sämmtlich eine ganze rationale Funktion der gegebenen Grössen als gemeinsamen Faktor enthalten.

Soll nun die Form F die Besonderheit haben, dass die bezügliche Funktion θ für alle Werte von x und für alle Werte der Coordinaten von $A_1, \ldots, A_{n-4}$ identisch verschwindet, so giebt es nach dem Satze VI der Abschnittes 5 in beliebiger Nähe der Punkte $U_1, \ldots, U_p$ noch andere Werthe $U_1', \ldots, U_p'$, welche jene Gleichungen befriedigen, d. h. jene Gleichungen haben unendlich viele Lösungen und daher müssten in diesem Falle mindestens in einer jener Gleichungen sämmtliche Coefficienten verschwinden. Durch Nullsetzen dieser sämmtlichen Coefficienten entsteht dann ein Gleichungssystem von der Gestalt

$$C_1 = 0, \quad \ldots, \quad C_M = 0,$$

wo $C_1, \ldots, C_M$ ganze rationale Funktionen von den Coefficienten $a_1, \ldots, a_N$ der Form F sind. Diese Funktionen, können nicht sämmtlich ein und

denselben Faktor enthalten, da ja die linken Seiten der obigen Gleichungen sonst ebenfalls diesen Faktor enthalten müssten, was unserer Festsetzung widerspricht. Wegen der gefundenen Eigenschaft definiren diese Gleichungen, wenn wir die Coefficienten $a_1, \ldots, a_N$ von F als homogene Punktcoordinaten in einem Raume R von $N - 1$ Dimensionen deuten, gewisse algebraische Gebilde, welche von niedrigerer als von der $N - 2^{\text{ten}}$ Dimension sind, und somit hat sich ergeben, dass die Funktion θ bei beliebiger Wahl der Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$ nur dann identisch verschwinden kann, wenn die Coefficienten $a_1, \ldots, a_N$ der betreffenden Form F im Raume R von $N - 1$ Dimensionen einen Punkt darstellen, welcher auf gewissen algebraischen Gebilden von niederer als der $N - 2^{\text{ten}}$ Dimension gelegen ist.

8.

Wir sind nun in den Stand gesetzt, die am Schlusse des Abschnittes 6 gefundenen Resultate auf alle definiten Formen auszudehnen. Zu dem Zwecke beweisen wir zuvor den folgenden Satz:

Es sei $f_1, f_2, \ldots$ eine unendliche Reihe definiter Formen, von denen jede eine Darstellung in der oben gefundenen Weise gestattet und deren Coefficienten in der Grenze bezüglich den Coefficienten einer bestimmten Form F gleich sind: diese Form F ist dann ebenfalls in der fraglichen Weise darstellbar.

Zum Beweise setzen wir

$$f_s = \frac{\varphi_s^2 + \psi_s^2 + \chi_s^2}{h_s} \qquad (s=1,2,\ldots)$$

und denken uns für jeden Wert von s den Bruch auf der rechten Seite so eingerichtet, dass der absolut grösste Coefficient in den Formen $\varphi_s, \psi_s, \chi_s$ der Einheit gleich wird, was sich offenbar stets erreichen lässt, indem wir Zähler und Nenner des Bruches durch das Quadrat dieses absolut grössten Coefficienten dividiren. Da nach der Voraussetzung auch die Coefficienten der Formen f_s sämmtlich absolut genommen unter einer gewissen Grenze liegen, so gilt das nämliche auch von den Coefficienten h_s. Betrachten

wir nun die unendliche Reihe der Coefficienten in den Formen $\varphi_s, \psi_s, \chi_s, h_s$, so folgt aus einem bekannten Satze, dass sich mindestens *ein* System von zugehörigen Werten finden lässt, in dessen Umgebung sich die Coefficientenwerte der Formenreihe verdichten. Die aus diesen Verdichtungswerten gebildeten Formen bezeichnen wir mit Φ, Ψ, X, H. Dann ist es für ein beliebig klein vorgeschriebenes δ stets möglich, eine Zahl s zu finden, so dass

$$|\Phi - \varphi_s| < \delta, \qquad |\Psi - \psi_s| < \delta \qquad |X - \chi_s| < \delta, \qquad |H - h_s| < \delta$$

ausfällt. Hieraus kann leicht bewiesen werden, dass

$$HF = \Phi^2 + \Psi^2 + X^2$$

ist; wäre nämlich

$$HF - \Phi^2 - \Psi^2 - X^2 = \Delta,$$

wo Δ eine Form ist, welche mindestens *einen* von o verschiedenen Coefficienten hat, so setze man

$$H = h_s + \pi_s, \quad F = f_s + \varkappa_s, \quad \Phi = \varphi_s + \delta_s, \quad \Psi = \psi_s + \varepsilon_s, \quad X = \chi_s + \eta_s,$$

in die letztere Gleichung ein und beachte, dass durch geeignete Wahl von s sämmtliche Coefficienten der Formen $\pi_s, \varkappa_s, \delta_s, \varepsilon_s, \eta_s$ unter jeden noch so kleinen Wert herabgedrückt werden können. Hiermit aber wäre es unvereinbar, dass Δ einen von o verschiedenen Coefficienten hat.

Durch eine leichte Überlegung folgt zugleich, dass nothwendigerweise, wenn für jedes s die 3 Formen $\varphi_s, \psi_s, \chi_s$ eine gewisse Anzahl gemeinsamer Nullstellen haben, auch die Grenzformen Φ, Ψ, X ebenso viele gemeinsame Nullstellen besitzen müssen.

Der leichteren Darstellung wegen, deuten wir im folgenden die N Coefficienten $a_1, \ldots, a_N$ der Form F als homogene Punktcoordinaten im Raume R von $N-1$ Dimensionen und betrachten in diesem Raume zunächst die durch die Gleichung $D = 0$ dargestellte Fläche, wo D die Diskriminante der Form F bedeutet. Diese Fläche ist von der $N-2^{\text{ten}}$ Dimension und theilt den Raum in verschiedene Gebiete. Wir denken

uns ferner in dem Raume R die durch die Gleichungen $C_1 = 0, \ldots, C_M = 0$ dargestellten algebraischen Gebilde construirt; dieselben sind den Ausführungen des vorigen Abschnittes zufolge von niederer als von der $N - 2^{ten}$ Dimension. Nunmehr fassen wir insbesondere diejenigen Punkte des Raumes R ins Auge, welche den definiten Formen entsprechen. Wie leicht einzusehen und auch bereits in meiner oben citirten Arbeit *Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*[1] bewiesen worden ist, können zwei definite Formen durch stetige Änderung der reellen Coefficienten in einander übergeführt werden, ohne dass dabei eine Form mit verschwindender Diskriminante passirt wird, d. h. die den definiten Formen entsprechenden Punkte des Raumes R erfüllen ein einziges zusammenhängendes Gebiet. An der Grenze dieses Gebietes liegen solche Punkte, denen definite Formen mit verschwindender Diskriminante entsprechen, und ausserdem ragen in jenes Gebiet der definiten Formen noch isolirte Gebilde von der $N - 3^{ten}$ und von niederen Dimensionen hinein, deren Punkte ebenfalls Formen mit verschwindender Diskriminante darstellen. Da die Gebilde $C_1 = 0, \ldots, C_M = 0$ ebenfalls höchstens von der $N - 3^{ten}$ Dimension sind, so können auch diese den Zusammenhang des Gebietes der definiten Formen nicht stören und wenn daher f und F zwei definite Formen sind, so ist es stets möglich durch stetige Änderung der reellen Coefficienten die Form f in die Form F überzuführen, ohne dass dabei ein Punkt der Diskriminantenfläche $D = 0$ oder ein Punkt des Gebildes $C_1 = 0, \ldots, C_M = 0$ überschritten wird.

Wir verstehen jetzt unter f die in Abschnitt 4 construirte definite Form. Da die Berührungspunkte $U_1, \ldots, U_p$ nicht auf einer Curve $n - 3^{ter}$ Ordnung liegen, so verschwindet die Funktion θ nicht identisch und der entsprechende Punkt im Raume R liegt daher nicht auf jenen Gebilden $C_1 = 0, \ldots, C_M = 0$, zugleich liegt derselbe ausserhalb der Diskriminantenfläche. Nun bezeichne F irgend eine beliebige definite Form, so dass der entsprechende Punkt entweder ausserhalb oder auf jenen besonderen Gebilden zu liegen kommt. Dann verbinde ich in der eben betrachteten Weise f mit F durch einen Weg, auf welchem die Form f stetig in F übergeht, ohne dass dabei ein auf jenen besonderen Gebilden gelegener Punkt passirt wird.

[1] Vgl. Mathematische Annalen. Bd. 32. S. 344.

Wir führen nunmehr den Beweis dafür, dass jedem Punkte dieses Weges eine Form entspricht, welche die fragliche Darstellung als Quotient gestattet. In der That, wenn wir den Weg bis zu einem bestimmten Punkte hin durchlaufen und wenn allen bis dahin durchlaufenen Punkten Formen entsprechen, welche jene Darstellung gestatten, so ist auch für die diesem Punkte entsprechende Form jene Darstellung möglich, wie aus dem zu Anfang dieses Abschnittes bewiesenen Satze folgt. Andererseits ergiebt sich aus Abschnitt 6 die folgende Thatsache: wenn für eine Form F, welche einem Punkte des construirten Weges entspricht die Darstellbarkeit bereits bewiesen worden ist, so lässt sich von diesem Punkte ab auf dem Wege stets ein endliches Stück abgrenzen derart, dass auch alle diesem Wegstücke entsprechende Formen jene Darstellung gestatten, und da die dem Endpunkt des Weges entsprechende Form F eine beliebige definite Form ist, so haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Jede beliebige ternäre definite Form F von der n^{ten} Ordnung ist in der Gestalt darstellbar

$$F = \frac{\Phi^2 + \Psi^2 + X^2}{H},$$

wo Φ, Ψ, X Formen mit reellen Coefficienten von der $n-2^{\text{ten}}$ Ordnung sind, und H die $n-4^{\text{te}}$ Ordnung besitzt.

9.

Das eben gewonnene Ergebniss liefert unmittelbar den Beweis für den in der Einleitung ausgesprochenen Satz; denn die rechter Hand im Nenner des Bruches auftretende Form H von der $n-4^{\text{ten}}$ Ordnung ist offenbar ebenfalls eine definite Form und gestattet daher wiederum nach eben jenem Satze die Darstellung als Bruch, dessen Zähler eine Summe von 3 Formenquadraten und dessen Nenner eine definite Form von der $n-8^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangen wir schliesslich zu einem Bruche, dessen Nenner eine Constante oder eine quadratische definite Form ist. Da letztere ebenfalls einer Summe von

Formenquadraten gleich ist, so erhalten wir nach Ausführung der Multiplicationen eine Darstellung der ursprünglichen Form F als Quotient von Quadratsummen. Wir sprechen den so gewonnenen Satz, wie folgt, aus:

Eine jede ternäre definite Form F lässt sich in der Gestalt

$$F = \frac{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \dots + \Phi_P^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_p^2}$$

darstellen, wo $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_P, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ Formen mit reellen Coefficienten sind.

Königsberg in Pr., 18 Februar 1892.

ZWEI DETERMINANTENSÄTZE

VON

E. NETTO

in GIESSEN.

1.

So viel ich weiss, ist der folgende Satz noch nicht bekannt.

Wird die aus dem Systeme

$$c_{\varkappa\lambda} \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varkappa=3,4,\ldots,n\\ \lambda=1,2,\ldots,n\end{smallmatrix}\right)$$

durch Fortlassung der α^{ten} *und der* β^{ten} *Colonne* $(\beta > \alpha)$ *entstehende Determinante durch* $\Delta_{\alpha\beta}$ *bezeichnet, ferner* $\Delta_{\beta\alpha} = -\Delta_{\alpha\beta}$ *gesetzt und* $\Delta_{\alpha\alpha} = 0$ *genommen, so wird*

$$\begin{vmatrix} \Delta_{\alpha\rho} & \Delta_{\alpha\sigma} & \Delta_{\alpha\tau} \\ \Delta_{\beta\rho} & \Delta_{\beta\sigma} & \Delta_{\beta\tau} \\ \Delta_{\gamma\rho} & \Delta_{\gamma\sigma} & \Delta_{\gamma\tau} \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Der Satz braucht nur unter der Voraussetzung bewiesen zu werden, dass nicht alle $\Delta_{\varkappa\lambda} \equiv 0$ sind. Wir verstehen unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ unbestimmte Grössen und betrachten das Gleichungssystem

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0, \tag{2}$$

$$c_{\varkappa 1} x_1 + c_{\varkappa 2} x_2 + \ldots + c_{\varkappa n} x_n = 0. \qquad (\varkappa = 3, 4, \ldots, n) \tag{3}$$

Daraus folgt

$$(-1)^\alpha x_\alpha = \begin{vmatrix} a_1 & \ldots & a_{\alpha-1} & a_{\alpha+1} & \ldots & a_n \\ c_{\varkappa 1} & \ldots & c_{\varkappa,\alpha-1} & c_{\varkappa,\alpha+1} & \ldots & c_{\varkappa n} \end{vmatrix}. \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

Betrachtet man in (2) die a als völlig willkürliche Veränderliche, so giebt (4) die allgemeinen Lösungen von (3)

$$(4') \qquad (-1)^\alpha x_\alpha = \sum_\lambda a_\lambda \Delta_{\alpha\lambda}. \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

Andererseits weiss man, dass jede Lösung von (3) aus zwei von einander unabhängigen Sonderlösungen linear zusammengesetzt werden kann, also etwa

$$(-1)^\alpha x_\alpha = \mu\Delta_{\alpha\rho} + \nu\Delta_{\alpha\sigma}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

so dass die Vergleichung der beiden letzten Resultate ergiebt:

$$\sum_\lambda a_\lambda \Delta_{\alpha\lambda} = \mu\Delta_{\alpha\rho} + \nu\Delta_{\alpha\sigma}. \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

Wenn man hierin $a_\tau = 1$ und die übrigen $a_\lambda = 0$ setzt, dann erhält man für $\alpha = \alpha, \beta, \gamma$ das in (1) ausgesprochene Resultat.

Es ist klar, in welcher Art der Satz sich erweitern lässt, sobald man das System $c_{\varkappa\lambda}$ für $\varkappa = 4, 5, \ldots, n$; $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ betrachtet.

2.

Der aufgestellte Satz kann auch direct bewiesen werden; es scheint aber, dass der Beweis sich umständlicher gestaltet, als wenn man auf die linearen Gleichungen zurückgeht. Das hier angewendete Hülfsmittel hat auch Herr K. Hensel (Acta mathematica, Bd. 14, S. 317—319) zum Beweise eines Kronecker'schen Determinantensatzes benutzt. Aber gerade in diesem Falle kann man den Nachweis auch unmittelbar liefern, indem man sich auf den Laplace'schen Determinanten-Zerlegungs-Satz stützt.

Das Theorem und sein Beweis nehmen dann die folgende Gestalt an:

Aus den beiden Systemen variabler Elemente

$$a_{hi}\,,\ b_{kl} \qquad \binom{h, i = 1, 2, \ldots, m}{k, l = 1, 2, \ldots, n}$$

bilden wir ein drittes System

$$c_{p,q} = a_{hi} b_{kl}, \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, m.n)$$

$$p = (h-1)n + k, \qquad q = (i-1)n + l, \qquad \binom{h, i = 1, \ldots, m}{k, l = 1, \ldots, n}$$

welches so beschaffen ist, dass zu jeder Combination a_{hi}, b_{kl} nur ein c_{pq} aber offenbar auch umgekehrt zu jedem c_{pq} nur eine Combination a_{hi}, b_{kl} gehört. Nun bezeichnen wir

$$\Delta_a = |a_{hi}|, \qquad \Delta_b = |b_{kl}|, \qquad \Delta_c = |c_{pq}|$$

und versuchen Δ_c durch Δ_a, Δ_b auszudrücken. Wir teilen durch Horizontalstriche die Determinante Δ_c von mn Zeilen in m Systeme von je n Zeilen. In jedem solchen steht in den Gliedern jeder einzelnen Colonne dasselbe a_{hi}, da in ihr q ungeändert bleibt und p von $(h-1)n+1$ bis $(h-1)n+n$ läuft. Greift man also zur Bildung einer LAPLACE'schen Subdeterminante n Colonnen heraus, dann kann man die a_{hi} herausziehen und behält eine Determinante aus den b_{kl} zurück, in der k von 1 bis n läuft. Diese Determinante ist also 0 oder Δ_b. Die LAPLACE'sche Satz zeigt also, dass Δ_c durch Δ_b^m teilbar ist. Vertauscht man die a mit den b, dann folgt ebenso die Teilbarkeit von Δ_c durch Δ_a^n und berücksichtigt man die Dimensionen der drei Determinanten in den a, b dann erkennt man, dass

$$\Delta_c = cst\,\Delta_a^n \Delta_b^m$$

sein wird, wo cst eine Constante bedeutet. Der Wert derselben ergiebt sich gleich 1, sobald man alle a, b mit von einander verschiedenen Indices gleich Null setzt.

3.

Die Methode des Überganges von Determinanten-Relationen zu linearen Gleichungen bewährt sich auch beim Beweise des folgenden Satzes.

Es sei

$$\underset{(i,k=1,\ldots,n)}{|c_{ik}| = C}, \qquad \underset{(i,k=1,\ldots,m;\; m<n)}{|c_{ik}| = D},$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1,m} & c_{1,\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m,1} & \ldots & c_{m,m} & c_{m,\beta} \\ c_{\alpha,1} & \ldots & c_{\alpha,m} & c_{\alpha,\beta} \end{vmatrix} = E(\alpha, \beta) \qquad (\alpha, \beta = m+1, \ldots, n)$$

dann ist

$$(1)\qquad \left| E(\alpha\,,\beta) \right|_{(\alpha,\beta=m+1,\ldots,n)} = D^{n-m-1}C.$$

Um dies zu beweisen, gehen wir von dem Systeme der Gleichungen aus

$$(2)\qquad \sum_{\beta} E(\alpha\,,\beta)x_{\beta} = 0 \qquad (\alpha,\beta=m+1,\ldots,n)$$

und nehmen an, die Determinante auf der linken Seite von (1) sei 0;[1] dann können die x so gewählt werden, dass sie, ohne sämmtlich zu verschwinden, (2) befriedigen. Zugleich ist (2) identisch mit

$$(3)\qquad \sum_{k} \frac{\partial E(\alpha\,,m+1)}{\partial c_{k,m+1}} \sum_{\beta} c_{k,\beta}x_{\beta} + D\sum_{\beta} c_{\alpha,\beta}x_{\beta} = 0. \qquad \binom{k=1,2,\ldots,m}{\alpha,\beta=m+1,\ldots,n}$$

Addirt man zu (3) die für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m$ identisch erfüllten Gleichungen

$$\sum_{k} \frac{\partial E(\alpha\,,m+1)}{\partial c_{k,m+1}} \sum_{\gamma} c_{k,\gamma}x_{\gamma} + D\sum_{\gamma} c_{\alpha,\gamma}x_{\gamma} = 0 \qquad \left(\begin{matrix}k=1,\ldots,m\\ \alpha=m+1,\ldots,n\\ \gamma=1,\ldots,m\end{matrix}\right)$$

so entsteht

$$(4)\qquad \sum_{k} \frac{\partial E(\alpha\,,m+1)}{\partial c_{k,m+1}} \sum_{i} c_{k,i}x_{i} + D\sum_{i} c_{\alpha,i}x_{i} = 0. \qquad \left(\begin{matrix}k=1,\ldots,m\\ i=1,\ldots,n\\ \alpha=m+1,\ldots,n\end{matrix}\right)$$

Wählt man nun die noch unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ so, dass

$$(5)\qquad \sum_{i} c_{k,i}x_{i} = 0 \qquad \binom{k=1,\ldots,m}{i=1,\ldots,n}$$

wird, dann folgt aus (4) dass auch alle

$$(6)\qquad \sum_{i} c_{\alpha,i}x_{i} = 0 \qquad \binom{\alpha=m+1,\ldots,n}{i=1,\ldots,n}$$

werden. Bei den letzten Schlüssen war vorausgesetzt, dass D nicht verschwinde. Kann man nun (5), (6) befriedigen, dann folgt, dass auch C verschwindet; d. h. *ist die Determinante* $\left| E(\alpha\,,\beta) \right|$ *Null, so ist entweder* C *oder* D *Null.*

---

[1] Mit solchen Determinanten beschäftigt sich KRONECKER, Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 72, S. 152, 153

Umgekehrt ruft $C = 0$, $D \neq 0$ das Verschwinden von $|E(\alpha, \beta)|$ hervor. Denn wenn $C = 0$ ist, kann man die $x_1, \ldots, x_n$ so wählen, dass (5), (6) erfüllt sind, ohne dass die x sämmtlich Null werden. Dabei kann man annehmen, dass eins der $x_{m+1}, \ldots, x_n$ nicht verschwindet, weil sonst wegen $D \neq 0$ unter Berücksichtigung von (5) auch alle $x_1, \ldots, x_m$ Null würden. Eliminirt man jetzt aus (5) und je einer Gleichung von (6) $x_1, x_2, \ldots, x_m$, so kommt man geradezu auf (2) zurück. Die Determinante von (2) ist also auch gleich Null.

Es sei ferner $D = 0$. Wäre nun der Satz, dass $|E(\alpha, \beta)|$ dann auch verschwindet, schon für einen Wert von n bewiesen, so gälte er auch für $n + 1$. Denn für diesen Fall brauchte man nur $|E(\alpha, \beta)|$ nach den Elementen der letzten Colonne zu entwickeln; die Adjuncten sind sämmtlich ähnliche Determinanten von einer um Eins niedrigeren Ordnung. Es reicht also aus, den Beweis für $n = m + 2$ zu liefern, d. h. zu zeigen, dass mit D auch

$$\begin{vmatrix} E(m+1, m+1) & E(m+1, m+2) \\ E(m+2, m+1) & E(m+2, m+2) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Entwickelt man die E nach Elementen der letzten Zeile und der letzten Colonne, und beachtet dabei $D = 0$, so entsteht die Form

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i,k} c_{m+1,i} c_{k,m+1} P_{ik}, & \sum\limits_{i,k} c_{m+1,i} c_{k,m+2} P_{ik} \\ \sum\limits_{i,k} c_{m+2,i} c_{k,m+1} P_{ik}, & \sum\limits_{i,k} c_{m+2,i} c_{k,m+2} P_{ik} \end{vmatrix},$$

wo die Summation sich auf alle $i, k = 1, \ldots, m$ bezieht und die P_{ik} Subdeterminanten von D sind. Die Determinante zerfällt in eine Summe

$$\sum_{i,k;\,i',k'} \begin{vmatrix} c_{m+1,i} c_{k,m+1} P_{ik}, & c_{m+1,i'} c_{k',m+2} P_{i'k'} \\ c_{m+2,i} c_{k,m+1} P_{ik}, & c_{m+2,i'} c_{k',m+2} P_{i'k'} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i,k;\,i',k'} c_{k,m+1} c_{k',m+2} P_{ik} P_{i'k'} \begin{vmatrix} c_{m+1,i} & c_{m+1,i'} \\ c_{m+2,i} & c_{m+2,i'} \end{vmatrix} = 0,$$

da die letzte Determinante entweder Null ist, oder durch eine andere zerstört wird, bei welcher i, i' vertauscht sind.

So ist gezeigt: *Ist* $C = 0$, *oder ist* $D = 0$, *so ist auch* $|E(\alpha, \beta)|$ *gleich Null.*

Da die Determinante der E homogen in den c ist, so kann man schon nach dem ersten der beiden erhaltenen Resultaten (vgl. HENSEL, Acta mathematica, Bd. 14, S. 319)

$$|E(\alpha, \beta)| = \Sigma q_{\mu\nu} C^{\mu} D^{\nu}$$

setzen, wobei die q von den c unabhängig sind, und stets

$$n\mu + m\nu = (m + 1)(n - m)$$

sein muss. Nimmt man alle ausserhalb der Hauptdiagonale in C stehenden Elemente gleich 0, so wird die Determinante der E gleich

$$(c_{11} c_{22} \ldots c_{m,m})^{n-m} c_{m+1,m+1} c_{m+2,m+2} \ldots c_{nn};$$

daraus geht sofort hervor, dass nur ein Wertepaar $\mu = 1$, $\nu = n - m - 1$ den Bedingungen genügt.

Hierdurch ist der zu Anfang des Paragrafen aufgestellte Satz bewiesen.

ÜBER EINIGE FÜR PRIMZAHLEN CHARAKTERISTISCHE BEZIEHUNGEN

VON

JACOB HACKS
in CREFELD.

Es seien m und n zwei beliebige positive ganze Zahlen. $[x]$ sei die grösste in x enthaltene ganze Zahl. Stellt man dann die Gleichungen auf

$$m = \left[\frac{m}{n}\right]n + r_1,$$

$$2m = \left[\frac{2m}{n}\right]n + r_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-1)m = \left[\frac{(n-1)m}{n}\right]n + r_{n-1}$$

und addirt, so kommt

$$\frac{mn(n-1)}{2} = n\sum_{s=1}^{s=n-1}\left[\frac{sm}{n}\right] + \sum_{s=1}^{s=n-1} r_s. \tag{1}$$

Bezeichnet man jetzt mit δ den grössten gemeinschaftlichen Teiler von m und n und setzt $m = m'\delta$, $n = n'\delta$, so dass m' und n' relative Primzahlen sind, so ergibt sich leicht

$$\sum_1^{n-1} r_s = \delta\frac{n'(n'-1)}{2}\delta = \frac{n(n-\delta)}{2}. \tag{2}$$

Setzt man diesen Wert in (1) ein, so folgt

$$\sum_1^{n-1}\left[\frac{sm}{n}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{\delta - 1}{2}. \tag{3}$$

Sind m und n relativ prim zu einander, so wird $\delta = 1$ und

$$\sum_{1}^{n-1}\left[\frac{sm}{n}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2}. \tag{4}$$

Bezeichnet jetzt p eine Primzahl, so ist p relativ prim zu $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Setzt man also in (4) $n = p$ und für m der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, \ldots, p-1$, so entstehen die Gleichungen

$$\sum_{1}^{p-1}\left[\frac{s}{p}\right] = 0 \cdot \frac{p-1}{2},$$

$$\sum_{1}^{p-1}\left[\frac{2s}{p}\right] = 1 \cdot \frac{p-1}{2},$$

$$\sum_{1}^{p-1}\left[\frac{3s}{p}\right] = 2 \cdot \frac{p-1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{1}^{p-1}\left[\frac{(p-1)s}{p}\right] = (p-2)\frac{p-1}{2},$$

durch deren Addition man die Beziehung erhält

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p-1}\ \sum_{s=1}^{s=p-1}\left[\frac{\nu s}{p}\right] = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 (p-2), \tag{5}$$

welche ohne Anwendung von Summenzeichen folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{p}\right] + \left[\frac{2}{p}\right] + \left[\frac{3}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{p-1}{p}\right] \\
+&\left[\frac{2}{p}\right] + \left[\frac{4}{p}\right] + \left[\frac{6}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{2(p-1)}{p}\right] \\
+&\left[\frac{3}{p}\right] + \left[\frac{6}{p}\right] + \left[\frac{9}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{3(p-1)}{p}\right] \\
+&\cdots \\
+&\left[\frac{p-1}{p}\right] + \left[\frac{2(p-1)}{p}\right] + \left[\frac{3(p-1)}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{(p-1)(p-1)}{p}\right] = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 (p-2).
\end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt nur für Primzahlen, wie sich leicht aus dem Umstande ergibt, dass nur eine Primzahl p die Eigenschaft hat, relativ prim zu den Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ zu sein. *Die Gleichung* (5) *ist also für Primzahlen charakteristisch.*

Setzt man in (4) $m = p$ und n der Reihe nach gleich $1, 2, 3, \ldots, p-1$, so erhält man in derselben Weise die Gleichung

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad & \left[\frac{p}{2}\right] + \left[\frac{p}{3}\right] + \left[\frac{p}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{p}{p-1}\right] \\
& + \left[\frac{2p}{3}\right] + \left[\frac{2p}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{2p}{p-1}\right] \\
& + \left[\frac{3p}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{3p}{p-1}\right] \\
& + \cdots \\
& + \left[\frac{(p-2)p}{p-1}\right] = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 (p-2),
\end{aligned}
$$

welche ebenfalls für eine Primzahl p charakteristisch ist.

Eine ähnliche Gleichung erhält man aus der bekannten für zwei beliebige positive relative Primzahlen m und n gültigen Beziehung

$$\sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{ms}{n}\right] + \sum_{1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left[\frac{ns}{m}\right] = \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]$$

(Gauss' Werke, Band 2, S. 9), indem man n gleich einer ungeraden Primzahl p und für m der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, \ldots, p-1$ setzt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{s}{p}\right] + \sum_{1}^{0} \left[\frac{ps}{1}\right] &= 0 \cdot \frac{p-1}{2}, \\
\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{2s}{p}\right] + \sum_{1}^{1} \left[\frac{ps}{2}\right] &= 1 \cdot \frac{p-1}{2}, \\
\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{3s}{p}\right] + \sum_{1}^{1} \left[\frac{ps}{3}\right] &= 1 \cdot \frac{p-1}{2}, \\
\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{4s}{p}\right] + \sum_{1}^{2} \left[\frac{ps}{4}\right] &= 2 \cdot \frac{p-1}{2}, \\
\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{5s}{p}\right] + \sum_{1}^{2} \left[\frac{ps}{5}\right] &= 2 \cdot \frac{p-1}{2}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{(p-1)s}{p}\right] + \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{ps}{p-1}\right] &= \frac{p-1}{2}\frac{p-1}{2}.
\end{aligned}
$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich

$$\sum_{y=1}^{y=p-1}\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}}\left[\frac{ys}{p}\right]+\sum_{y=1}^{y=p-1}\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{y}{2}\right]}\left[\frac{ps}{y}\right]=\left(\frac{p-1}{2}\right)^2. \tag{7}$$

Auch diese Gleichung ist für eine Primzahl p charakteristisch, wie sich daraus ergibt, dass für zwei beliebige positive ganze Zahlen m und n mit dem grössten gemeinschaftlichen Teiler δ die Beziehung besteht

$$\sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\frac{ms}{n}\right]+\sum_{1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{ns}{m}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{\delta}{2}\right] \tag{8}$$

(cf. Acta mathematica, Band 10, S. 34).

Die Gleichungen (5), (6) und (7) haben die Eigenschaft, dass sie ausser p nur bestimmte Zahlen enthalten.

Für den grössten gemeinschaftlichen Teiler δ zweier Zahlen m und n ergeben sich aus (2), (3) und (8) bezw. folgende Ausdrücke:

$$\delta=\frac{n^2-2\sum_{1}^{n-1}r_s}{n};$$

$$\delta=2\sum_{1}^{n-1}\left[\frac{sm}{n}\right]-mn+m+n;$$

$$\delta=2\sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\frac{sm}{n}\right]+2\sum_{1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{sn}{m}\right]-2\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]$$

oder

$$\delta=2\sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\frac{sm}{n}\right]+2\sum_{1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{sn}{m}\right]-2\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]+1,$$

je nachdem die Zahlen m und n beide gerade, oder wenigstens eine von ihnen ungerade ist.

SUR LE CAS TRAITÉ PAR M^me KOWALEVSKI DE ROTATION D'UN CORPS SOLIDE PESANT AUTOUR D'UN POINT FIXE

PAR

FRITZ KÖTTER

À BERLIN.

Dans le 12 volume de ce journal M^me de KOWALEVSKI a publié un mémoire qui constitue un progrès important et réel dans l'étude du mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. Aux deux cas déjà connus de ce problème elle en ajoute un troisième dans l'hypothèse où les cosinus directeurs de la direction de la pesanteur, et les trois composantes de la vitesse de rotation s'expriment dans le voisinage d'une valeur finie du temps quelconque même complexe sous la forme

$$(t - t_0)^{-m}\mathfrak{P}(t - t_0).$$

Ce cas est caractérisé par ce fait que deux des moments principaux d'inertie sont égaux entre eux et doubles du troisième et que le centre de gravité est dans le plan de ces deux moments principaux. Dans un mémoire postérieur (tome 14 de ce journal), M^me de KOWALEVSKI a démontré que ce cas est le seul en dehors des deux précédemment connus qui jouit de la propriété annoncée. Dans ce cas en dehors des trois intégrales générales des six équations différentielles pour les composantes de la vitesse de rotation et les cosinus directeurs de la direction de la pesanteur, il existe une autre intégrale algébrique de manière que le problème est ramené aux quadratures. Au moyen de ces quatre intégrales il est possible

d'exprimer les six grandeurs en question au moyen de fonctions hyperelliptiques de deux arguments. Il résulte encore des équations différentielles du problème que ces arguments sont des fonctions linéaires du temps. Quant aux six cosinus qui manquent encore, M^me de KOWALEVSKI déclare qu'on peut les représenter aussi au moyen des fonctions thêta, mais elle renonce à faire le calcul à cause des difficultés qu'elle prévoit.

On peut éviter ces difficultés en exprimant d'une manière convenable les trois cosinus de direction. Pour le cosinus directeur γ'' de l'axe principal d'inertie distinguée, M^me de KOWALEVSKI a déjà obtenu une expression relativement simple, à savoir une fraction dont les deux termes sont des fonctions linéaires homogènes de trois fonctions hyperelliptiques. Au contraire pour les cosinus γ et γ' qui relient les deux autres axes du corps avec la pesanteur, se présentent des fractions très compliquées dont le dénominateur est le carré du dénominateur de γ'', et dont les numérateurs sont des fonctions homogènes du 2^d degré d'un grand nombre de fonctions hyperelliptiques. Ces expressions peuvent se mettre sous une forme beaucoup plus claire si on calcule $\gamma + i\gamma'$, $\gamma - i\gamma'$. Ces deux expressions sont des fractions dont les numérateurs et dénominateurs sont composés d'une manière relativement claire linéairement au moyen de six fonctions hyperelliptiques. Cette forme induit à étudier au lieu du mouvement des trois axes le mouvement d'un troisième système de coordonnées dont la position est bien déterminée à chaque instant par rapport au système de coordonnées précédent. Les cosinus directeurs des nouveaux axes et de la verticale sont des fractions dont les numérateurs comme le dénominateur commun sont des fonctions linéaires et homogènes de fonctions hyperelliptiques. Un examen attentif des coefficients de ces expressions montre qu'on peut les représenter plus simplement au moyen de fonctions hyperelliptiques de deux arguments dont les valeurs sont naturellement constantes. Indépendamment de la valeur des quatre arguments ainsi introduits, les trois fonctions de ces arguments satisfont à la condition caractéristique pour les trois cosinus directeurs d'une droite avec trois axes rectangulaires, en outre elles satisfont à certaines équations différentielles partielles, dont une autre solution est de grande importance pour l'étude du mouvement d'un corps solide dans un fluide. C'est cette circonstance qui dans ce cas comme dans l'autre fournit une détermination simple et naturelle des six cosinus directeurs restants.

Dans ce qui suit je développerai les résultats auxquels j'ai arrivé de cette manière, et même déduirai les quantités obtenues par M[me] de KOWALEVSKI, pour les avoir sous la forme la plus commode pour les développements suivants.

---

§ 1. *Les équations différentielles et les quatre intégrales algébriques.*

A un instant donné la position d'un corps qui tourne autour d'un point fixe, est complètement déterminée par les cosinus directeurs de deux systèmes d'axes de coordonnées rectangulaires dont l'un est fixe dans l'espace, et l'autre fixe dans le corps qui tourne. Le système d'axes fixes dans l'espace Ξ, Π, Z est choisi de manière que l'axe Z soit dans la direction de la pesanteur. Le système de coordonnées fixes dans le corps n'est pas encore déterminé par la condition de coïncider avec les axes principaux d'inertie, parce qu'ici deux axes principaux d'inertie sont égaux entre eux, et que par suite toutes les directions d'un certain plan peuvent être considérées comme axes principaux d'inertie. Nous supposons donc le système d'axes choisi de manière que l'axe Z coïncide avec le plus petit axe d'inertie, et que le centre de gravité du corps soit sur la partie positive de l'axe des X. Nous désignons avec KIRCHHOFF les moments principaux d'inertie et la masse du corps par P, Q, R et M et par x_0 la distance à l'origine du centre de gravité et par g l'accélération due à l'attraction de la terre. Les cosinus directeurs des trois axes du corps avec la verticale sont $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et les cosinus directeurs avec les deux axes horizontaux seront $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Dans notre cas on a donc

$$P = Q = 2R.$$

Par un choix convenable de l'unité de longueur on peut prendre

$$R = M$$

et par un choix convenable de l'unité du temps on peut faire que

$$gx_0 = 1$$

alors nous obtenons pour les composantes de la vitesse de rotation et pour les cosinus directeurs $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les équations différentielles suivantes

$$2\frac{dp}{dt} = qr, \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3,$$

$$2\frac{dq}{dt} = -pr - \gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1,$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma_2, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2.$$

De ces équations différentielles on peut déduire quatre équations intégrales algébriques, à savoir d'abord la relation entre les cosinus directeurs

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

secondement l'expression du théorème des aires

$$2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 = 2l$$

troisièmement le théorème de la conservation de la force vive

$$2(p^2 + q^2) + r^2 = 2\gamma_1 + 6l_1$$

et quatrièmement une intégrale spéciale à laquelle on arrive de la manière suivante.

On reconnait facilement que par suite des équations différentielles on a les équations

$$\frac{d}{dt}\{(p+iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2\} = -ir\{(p+iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2\},$$

et

$$\frac{d}{dt}\{(p-iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2\} = +ir\{(p-iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2\}.$$

D'où il résulte immédiatement

$$\{(p+iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2\}\{(p-iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2\} = k^2,$$

où k désigne une constante réelle.

§ 2. *Représentation des six quantités $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p, q, r$ au moyen de fonctions hyperelliptiques.*

Déjà M[me] de KOWALEVSKI a ramené les quatre équations intégrales à une autre forme en introduisant au lieu de γ_1, γ_2, p, q, les quatre quantités

$$x_1 = p + iq, \qquad x_2 = p - iq,$$
$$\xi_1 = (p + iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2, \qquad \xi_2 = (p - iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2;$$

alors les équations intégrales deviennent

$$\text{(1 a)} \qquad \xi_1 \xi_2 = k^2,$$

$$\text{(1 b)} \qquad r^2 = 6l_1 + \xi_1 + \xi_2 - (x_1 + x_2)^2,$$

$$\text{(1 c)} \qquad r\gamma_3 = 2l - x_2\xi_1 - x_1\xi_2 + x_1x_2(x_1 + x_2),$$

$$\text{(1 d)} \qquad \gamma_3^2 = 1 - k^2 + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2 - x_1^2x_2^2.$$

En éliminant de ces équations les quantités r und γ_3 nous obtenons l'équation

$$\text{(2)} \qquad \xi_1 R(x_1) + \xi_2 R(x_2) + R_1(x_1, x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 = 0,$$

où on a posé pour abréger

$$\text{(3 a)} \qquad R(x) = -x^4 + 6l_1x^2 + 4lx + 1 - k^2,$$

$$\text{(3 b)} \qquad R_1(x_1, x_2) = -6l_1x_1^2x_2^2 - 4lx_1x_2(x_1 + x_2) - (1 - k^2)(x_1 + x_2)^2 + 6l_1(1 - k^2) - 4l^2.$$

Nous pouvons évidemment convenir que k sera une valeur positive, et poser alors $\sqrt{\xi_1}\sqrt{\xi_2} = k$, si nous convenons aussi que $\sqrt{\xi_1}$ et $\sqrt{\xi_2}$ représentent des valeurs imaginaires conjuguées. De (1 a) et (2) nous tirons alors les équations

$$\left\{\sqrt{\xi_1}\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} \pm \sqrt{\xi_2}\frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2}\right\}^2 = -\frac{R_1(x_1 x_2)}{(x_1 - x_2)^2} \pm 2k\frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} - k^2.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} & R(x_1)R(x_2) - R_1(x_1, x_2)(x_1 - x_2)^2 \\ = & \, x_1^4 x_2^4 - 12 l_1 x_1^3 x_2^3 + 36 l_1^2 x_1^2 x_2^2 - 4 l x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) + 24 l_1 l x_1 x_2 (x_1 + x_2) \\ & + 4 l^2 (x_1 + x_2)^2 + 2(1 - k^2) x_1^2 x_2^2 + 12 l_1 (1 - k^2) x_1 x_2 \\ & + 4 l (1 - k^2)(x_1 + x_2) + (1 - k^2)^2 \\ = & \, (- x_1^2 x_2^2 + 6 l_1 x_1 x_2 + 2 l (x_1 + x_2) + (1 - k^2))^2 \end{aligned}$$

ou si on pose pour abréger

$$R(x_1, x_2) = - x_1^2 x_2^2 + 6 l_1 x_1 x_2 + 2 l (x_1 + x_2) + 1 - k^2, \tag{3 c}$$

$$R(x_1) R(x_2) - (x_1 - x_2)^2 R_1(x_1, x_2) = R(x_1, x_2)^2.$$

Nous obtenons donc

$$\left\{ \sqrt{\xi_1} \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} \pm \sqrt{\xi_2} \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} \right\}^2 = \frac{R(x_1, x_2)^2 - R(x_1) R(x_2)}{(x_1 - x_2)^4} \pm 2k \frac{\sqrt{R(x_1)} \sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} - k^2.$$

Si nous posons

$$t_1 = \frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)} \sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2}, \qquad t_2 = \frac{R(x_1, x_2) + \sqrt{R(x_1)} \sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} \tag{4}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\{ \sqrt{\xi_1} \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} \pm \sqrt{\xi_2} \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} \right\}^2 & = t_1 t_2 \mp k (t_1 - t_2) - k^2 \\ & = (t_1 \pm k)(t_2 \mp k) \end{aligned}$$

et par suite

$$\sqrt{\xi_1} \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(t_1 + k)(t_2 - k)} + \sqrt{(t_1 - k)(t_2 + k)} \right), \tag{5 a}$$

$$\sqrt{\xi_2} \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(t_1 + k)(t_2 - k)} - \sqrt{(t_1 - k)(t_2 + k)} \right). \tag{5 b}$$

En vertu de l'équation (4), on peut exprimer les quantités x_1, x_2 de la manière suivante au moyen de t_1, t_2. Comme on le voit facilement, à chaque système de valeurs t_1, t_2 correspondent 8 systèmes de valeurs x_1, x_2. Les grandeurs $x_1 x_2$ et $x_1 + x_2$ ont une relation ration-

nelle aussi bien avec $t_1 + t_2$ qu'avec $t_1 t_2$, et chacune de ces équations est du second degré en $x_1 x_2$ et $x_1 + x_2$. D'après l'équation (4) les grandeurs t sont les racines de l'équation

$$t^2 - 2\frac{R(x_1, x_2)}{(x_1 - x_2)^2}t - \frac{R_1(x_1, x_2)}{(x_1 - x_2)^2} = 0,$$

qui peut aussi s'écrire

$$(t-u)^2 - 2\frac{R(x_1, x_2) - u(x_1 - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2}(t-u)$$

$$+ \frac{-R_1(x_1, x_2) - 2R(x_1, x_2)u + u^2(x_1 - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} = 0.$$

Le numérateur du dernier terme de cette équation peut s'écrire de la manière suivante

$$2(u + 3l_1)x_1^2 x_2^2 + 4l x_1 x_2(x_1 + x_2) - 4u(u + 3l_1)x_1 x_2$$

$$+ (1 - k^2 + u^2)(x_1 + x_2)^2 - 4lu(x_1 + x_2) + 4l^2 - 6l_1(1 - k^2) - 2(1 - k^2)u$$

$$= \left(\sqrt{2(u + 3l_1)}(x_1 x_2 - u) + \frac{2l}{\sqrt{2(u + 3l_1)}}(x_1 + x_2)\right)^2$$

$$+ \left[2(u^2 + (1 - k^2))(u + 3l_1) - 4l^2\right]\left(\frac{(x_1 + x_2)^2}{2(u + 3l_1)} - 1\right).$$

Si nous posons maintenant $t + 3l_1 = s$, $u + 3l_1 = z$ et

$$z((z - 3l_1)^2 + (1 - k^2)) - 2l^2 = \varphi(z)$$

nous avons

$$(6) \qquad (s - z)^2 - 2\frac{R(x_1, x_2) - (z - 3l_1)(x_1 - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2}(s - z)$$

$$+ \left(\sqrt{2z}\frac{x_1 x_2 - z + 3l_1}{x_1 - x_2} + \frac{2l}{\sqrt{2z}}\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\right)^2 + 2\frac{\varphi(z)}{(x_1 - x_2)^2}\left(\frac{(x_1 + x_2)^2}{2z} - 1\right) = 0.$$

Si nous appelons e_1, e_2, e_3 les racines de l'équation $\varphi(z)$ résolue par rapport à z, alors pour $z = e_\alpha$ les produits $(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)$ deviennent les carrés de fonctions rationnelles de x_1 et x_2 nous obtenons les équations

$$\sqrt{2e_\alpha}\frac{x_1 x_2 - e_\alpha + 3l_1}{x_1 - x_2} + \frac{2l}{\sqrt{2e_\alpha}}\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Et si nous les multiplions par $-\frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}$, $\frac{2l}{\sqrt{2e_\alpha}\,\varphi'(e_\alpha)}$, $-\frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}(e_\beta + e_\gamma)$ et si nous ajoutons

$$(7\text{a})\qquad \frac{2}{x_1 - x_2} = -\sum_{\alpha=1,2,3} \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} \sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)},$$

$$(7\text{b})\qquad \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \sum_{\alpha=1,2,3} \frac{2l}{\sqrt{2e_\alpha}\,\varphi'(e_\alpha)} \sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)},$$

$$(7\text{c})\qquad \frac{x_1 x_2 + 3l_1}{x_1 - x_2} = -\sum_{\alpha=1,2,3} \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} (e_\beta + e_\gamma) \sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)}.$$

Si les racines sont choisies convenablement, on peut poser

$$2l = \sqrt{2e_\alpha}\sqrt{e_\beta e_\gamma};$$

nous obtenons alors

$$(7\text{d})\qquad \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} \sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)},$$

où les signes des radicaux peuvent toujours et doivent être choisis de manière que $2\sqrt{e_\beta e_\gamma} = \sqrt{2e_\beta}\sqrt{2e_\gamma}$.

Nous obtenons très simplement les grandeurs $\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2}$ et $\frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2}$ de la manière suivante. On a

$$s = \frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + 3l_1$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{R(x_1) + R(x_2) + (x_1^2 - x_2^2)^2 - 2\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2},$$

d'où il résulte

$$\left(\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} - \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2}\right)^2 = 2s_1 - (x_1 + x_2)^2;$$

on a de même

$$\left(\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} + \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2}\right)^2 = 2s_2 - (x_1 + x_2)^2.$$

Mais lorsque $s = s_1$ l'équation (6) a lieu pour toute valeur de z. Si on pose $z = s_1$ on obtient

$$\left(\sqrt{2s_1}\frac{x_1x_2 - s_1 + 3l_1}{x_1 - x_2} + \frac{2l}{\sqrt{2s_1}}\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\right)^2 + \frac{2\varphi(s_1)}{(x_1 - x_2)^2}\left(\frac{(x_1 + x_2)^2}{2s_1} - 1\right) = 0$$

et par suite

$$2s_1 - (x_1 + x_2)^2 = \frac{1}{2\varphi(s_1)}(2s_1(x_1x_2 + 3l_1 - s_1) + 2l(x_1 + x_2))^2.$$

Par un choix convenable des signes des radicaux on peut donc écrire

$$\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} - \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_1)}}(2s_1(x_1x_2 + 3l_1 - s_1) + 2l(x_1 + x_2)),$$

$$\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} + \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_2)}}(2s_2(x_1x_2 + 3l_1 - s_2) + 2l(x_1 + x_2)).$$

Des signes des deux radicaux $\sqrt{\varphi(s_1)}$ et $\sqrt{\varphi(s_2)}$ l'un seulement est arbitraire, parce que $R(x_1)$ et $R(x_2)$ s'expriment rationnellement au moyen des quantités $\sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}$. En multipliant les deux équations nous obtenons

$$\frac{R(x_1) - R(x_2)}{(x_1 - x_2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{2s_1(x_1x_2 + 3l_1 - s_1) + 2l(x_1 + x_2)}{\sqrt{\varphi(s_1)}}\frac{2s_2(x_1x_2 + 3l_1 - s_2) + 2l(x_1 + x_2)}{\sqrt{\varphi(s_2)}}.$$

Si nous multiplions le premier membre par $x_1 - x_2$ et si nous donnons alors à x_1, x_2 la même valeur très-grande x, alors nous obtenons $-4x^3$. Si nous désignons par ε l'une des valeurs $+1$ ou -1, on peut écrire

$$\sqrt{\varphi(s_1)}\sqrt{\varphi(s_2)} = \varepsilon \prod_{a=1,2,3} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}.$$

C'est pourquoi en opérant de même sur le second membre, nous obtenons la valeur $-4\varepsilon x^3$. Nous avons alors à poser pour ε la valeur $+1$, ou en d'autres termes, à choisir les radicaux $\sqrt{\varphi(s_1)}$ et $\sqrt{\varphi(s_2)}$, de manière que

$$\sqrt{\varphi(s_1)}\sqrt{\varphi(s_2)} = \prod_{a=1,2,3} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}.$$

On a de plus

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(s)}}(2s(x_1x_2+3l_1-s)+2l(x_1+x_2)) = \sqrt{\varphi(s)}\frac{2s(x_1x_2+3l_1-s)+2l(x_1+x_2)}{(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}$$

$$= \sqrt{\varphi(s)}\sum_a \frac{2e_a(x_1x_2+3l_1-e_a)+2l(x_1+x_2)}{\varphi'(e_a)(s-e_a)}$$

$$= \sqrt{\varphi(s)}(x_1-x_2)\sum\frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}\frac{\sqrt{(s_1-e_a)(s_2-e_a)}}{s-e_a}$$

$$= -2\sqrt{\varphi(s)}\frac{\sum\frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}\frac{\sqrt{(s_1-e_a)(s_2-e_a)}}{s-e_a}}{\sum\frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}\sqrt{(s_1-e_a)(s_2-e_a)}}.$$

D'après cela nous obtenons

$$\text{(8 a)}\qquad \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1-x_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sum\frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}\left(\frac{\sqrt{\varphi(s_1)}}{s_1-e_a}-\frac{\sqrt{\varphi(s_2)}}{s_2-e_a}\right)\sqrt{(s_1-e_a)(s_2-e_a)}}{\sum\frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}\sqrt{(s_1-e_a)(s_2-e_a)}},$$

$$\text{(8 b)}\qquad \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2} = +\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sum\frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}\left(\frac{\sqrt{\varphi(s_1)}}{s_1-e_a}+\frac{\sqrt{\varphi(s_2)}}{s_2-e_a}\right)\sqrt{(s_1-e_a)(s_2-e_a)}}{\sum\frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}\sqrt{(s_1-e_a)(s_2-e_a)}}.$$

De plus on a

$$2\frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} = -(s_1-s_2),$$

et par conséquent

$$\left(\frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}\right)^{-1} = -\frac{2}{s_1-s_2}\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1-x_2},$$

$$\left(\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1-x_2}\right)^{-1} = -\frac{2}{s_1-s_2}\frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2};$$

ainsi nous obtenons de (5 a) et (5 b) en posant

$$-k+3l_1 = e_4, \qquad +k+3l_1 = e_5$$

$$\sqrt{\xi_1} = + \frac{1}{s_1 - s_2}\left\{\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)} + \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)}\right\}$$
$$\frac{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}\left(\frac{\sqrt{\varphi(s_1)}}{s_1 - e_\alpha} - \frac{\sqrt{\varphi(s_2)}}{s_2 - e_\alpha}\right)\sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)}}{\sqrt{2}\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}\sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)}},$$

$$\sqrt{\xi_2} = - \frac{1}{s_1 - s_2}\left\{\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)} - \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)}\right\}$$
$$\frac{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}\left(\frac{\sqrt{\varphi(s_1)}}{s_1 - e_\alpha} + \frac{\sqrt{\varphi(s_2)}}{s_2 - e_\alpha}\right)\sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)}}{\sqrt{2}\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}\sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)}}.$$

Nous déterminons les expressions $\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_4)}$ et $\sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_5)}$ de manière que l'on ait

$$\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_4)}\sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_5)} = \sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)}\sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)}.$$

De plus nous déterminons $\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)}$ et $\sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}$ au moyen des équations

$$\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_4)}\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)} = (s_1 - e_4)\sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)},$$
$$\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_4)}\sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)} = (s_2 - e_4)\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)}.$$

De plus nous posons

$$S_\beta = \sqrt{(s_\beta - e_4)(s_\beta - e_5)}\sqrt{\varphi(s_\beta)} = \sqrt{\prod_{\alpha=1}^{5}(s_\beta - e_\alpha)}, \qquad (\beta = 1, 2)$$
$$P_\alpha = \sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5)$$

de manière qu'on ait aussi

$$S_1 S_2 = \prod_{\alpha=1}^{5} P_\alpha.$$

Enfin nous désignons par $P_{\alpha\beta}$ l'expression

$$\frac{P_\alpha P_\beta}{s_1 - s_2}\left\{\frac{S_1}{(s_1 - e_\alpha)(s_1 - e_\beta)} - \frac{S_2}{(s_2 - e_\alpha)(s_2 - e_\beta)}\right\}.$$

Cela posé, nous pouvons écrire

$$(9a)\qquad \sqrt{\xi_1} = \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sqrt{2}\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a},$$

$$(9b)\qquad \sqrt{\xi_2} = \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sqrt{2}\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}.$$

Or, on a $\sqrt{\xi_1}\sqrt{\xi_2} = k$. D'où

$$2k\left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a\right)^2 = \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4}\right)^2 - \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}\right)^2.$$

Les grandeurs ξ_1 et ξ_2 elles-mêmes peuvent s'exprimer par

$$(10a)\qquad \xi_1 = k\frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}},$$

$$(10b)\qquad \xi_2 = k\frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}.$$

Des grandeurs ξ et x on tire alors les grandeurs $y_1 = \gamma_1 + i\gamma_2$, $y_2 = \gamma_1 - i\gamma_2$ au moyen des équations $y_\beta = \xi_\beta - x_\beta^2$.

Or les expressions de x_β et x_β^2 peuvent être transformées de la manière suivante.

Des équations (7) il résulte

$$(11a)\qquad x_1 = -\frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a + 1}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a},$$

$$(11b)\qquad x_2 = -\frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a - 1}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}.$$

Nous ajoutons aux dénominateurs et aux numérateurs de ces fractions respectivement le facteur

$$\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}.$$

Or, on a:

$$\left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a\right)\left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4}\right) - \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a4}\right)\left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a\right)$$

$$= \sum_{\beta \neq \gamma} \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_\beta)\varphi'(e_\gamma)} (e_\beta - e_\gamma) P_\gamma P_{\beta 4}$$

$$= -\sum_a \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \frac{P_\beta P_\gamma P_4}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{S_1}{(s_1 - e_\beta)(s_1 - e_\gamma)(s_1 - e_4)} - \frac{S_2}{(s_2 - e_\beta)(s_2 - e_\gamma)(s_2 - e_4)} \right\};$$

et cela devient en vertu de $S_1 S_2 = \prod_{a=1}^{5} P_a$

$$-\sum_a \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \frac{P_a P_5}{s_1 - s_2} \left(\frac{S_2}{(s_2 - e_a)(s_2 - e_5)} - \frac{S_1}{(s_1 - e_a)(s_1 - e_5)} \right) = \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}.$$

On a donc les deux équations

$$\left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a\right)\left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4}\right) - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5} = \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a4}\right)\left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a\right),$$

$$\left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a\right)\left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}\right) - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} = \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}\right)\left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a\right).$$

Par suite on peut séparer dans le numérateur de x_1 et de x_2 le facteur $\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a$. Nous obtenons donc

$$x_1 = -\frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}, \tag{12a}$$

$$x_2 = -\frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}. \tag{12b}$$

Pour obtenir x_1^2 et x_2^2 nous multiplions les deux expressions de x_1 et celles de x_2. Au numérateur s'introduit alors la somme et la différence des deux expressions

$$\left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 4}\right)\left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha\right) - \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 5},$$

$$\left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 5}\right)\left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha\right) - \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 4}.$$

Parce qu'on a

$$(e_\beta - e_\gamma) P_{\alpha 5} = -(P_\gamma P_{\beta 4} - P_\beta P_{\gamma 4}),$$

et par suite

$$\sum \frac{P_{\alpha 5}\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} = \sum_{\beta \neq \gamma} P_\gamma P_{\beta 4} \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}(e_\beta - e_\gamma)}{\varphi'(e_\beta)\varphi'(e_\gamma)},$$

nous obtenons pour la première des deux expressions

$$\sum \frac{e_\beta e_\gamma}{\varphi'^2(e_\alpha)} P_{\alpha 4} P_\alpha + \sum_{\beta \neq \gamma} P_\gamma P_{\beta 4} \frac{\sqrt{e_\gamma e_\beta}(e_\alpha + e_\gamma - e_\beta)}{\varphi'(e_\beta)\varphi'(e_\gamma)}.$$

Mais on a encore

$$e_\beta e_\gamma = \varphi'(e_\alpha) + e_\alpha(e_\beta + e_\gamma - e_\alpha)$$

et $e_\beta + e_\gamma - e_\alpha = 2(3l_1 - e_\alpha)$. De plus l'expression $\sum \frac{P_\alpha P_{\alpha 4}}{\varphi'(e_\alpha)}$ se réduit à zéro, et l'expression entière peut s'écrire

$$\sum_\alpha \frac{2e_\alpha(3l_1 - e_\alpha)}{\varphi'^2(e_\alpha)} P_{\alpha 4} P_\alpha + \sum_{\beta \neq \gamma} \frac{2\sqrt{e_\beta e_\gamma}(3l_1 - e_\beta)}{\varphi'(e_\beta)\varphi'(e_\gamma)} P_\gamma P_{\beta 4}$$

$$= \left(\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha\right)\left(\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}(3l_1 - e_\alpha) P_{\alpha 4}\right).$$

Alors on a

$$x_1^2 = \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}(3l_1 - e_\alpha) P_{\alpha 4} - \sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}(3l_1 - e_\alpha) P_{\alpha 5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 4} - \sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 5}},$$

$$x_2^2 = \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}(3l_1 - e_\alpha) P_{\alpha 4} + \sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}(3l_1 - e_\alpha) P_{\alpha 5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 4} + \sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 5}};$$

au moyen des valeurs données plus haut pour ξ_1, ξ_2 nous obtenons de plus

$$(13\text{a}) \qquad y_1 = \xi_1 - x_1^2 = \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}(e_a - e_4)P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}(e_a - e_5)P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}P_{a5}},$$

$$(13\text{b}) \qquad y_2 = \xi_2 - x_2^2 = \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}(e_a - e_4)P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}(e_a - e_5)P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}P_{a5}}.$$

Le cosinus directeur qui manque encore, et la composante de la vitesse angulaire qui reste à déterminer se tirent des équations (1 b), (1 c), (1 d). Si nous les multiplions par x_1^2, $2x_1$, 1 et x_2^2, $2x_2$, 1, nous obtenons

$$(rx_1 + \gamma_3)^2 = R(x_1) + (x_1 - x_2)^2\xi_1,$$
$$(rx_2 + \gamma_3)^2 = R(x_2) + (x_1 - x_2)^2\xi_2,$$

tandis qu'on obtient en les multipliant par x_1x_2, $x_1 + x_2$, 1

$$(rx_1 + \gamma_3)(rx_2 + \gamma_3) = R(x_1, x_2).$$

Par suite de ces équations le signe de l'une des grandeurs est déterminé par celui de l'autre. Les deux premières équations peuvent s'écrire

$$\left(\frac{rx_1 + \gamma_3}{\sqrt{R(x_1)}}\right)^2 = 1 + \frac{(x_1 - x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)} \frac{\xi_1 R(x_2)}{(x_1 - x_2)^2}$$
$$= 1 + \frac{\left(\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)} + \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)}\right)^2}{(s_1 - s_2)^2}$$

et

$$\left(\frac{rx_2 + \gamma_3}{\sqrt{R(x_2)}}\right)^2 = 1 + \frac{(x_1 - x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)} \frac{\xi_2 R(x_1)}{(x_1 - x_2)^2}$$
$$= 1 + \frac{\left(\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)} - \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)}\right)^2}{(s_1 - s_2)^2},$$

tandis qu'on a

$$\frac{(rx_1 + \gamma_3)(rx_2 + \gamma_3)}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}} = \frac{R(x_1, x_2)}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}} = -\frac{s_1 + s_2 - 6l_1}{s_1 - s_2} = -\frac{s_1 + s_2 - e_4 - e_5}{s_1 - s_2}.$$

Il va de soi qu'ici tous les radicaux ont la signification donnée plus haut. Les seconds membres des deux premières équations peuvent encore s'écrire

$$\frac{\left(\sqrt{(s_1-e_4)(s_1-e_5)}+\sqrt{(s_2-e_4)(s_2-e_5)}\right)^2}{(s_1-s_2)^2}$$

et

$$\frac{\left(\sqrt{(s_1-e_4)(s_1-e_5)}-\sqrt{(s_2-e_4)(s_2-e_5)}\right)^2}{(s_1-s_2)^2}.$$

Nous n'avions rien fixé de plus pour le signe de P_5 et de P_4, si ce n'est que leur produit fût égal à $\sqrt{(s_1-e_4)(s_2-e_5)}\sqrt{(s_2-e_4)(s_1-e_5)}$. En disposant convenablement du signe de ces grandeurs nous pouvons poser

$$\frac{rx_1+\gamma_3}{\sqrt{R(x_1)}}=\frac{\sqrt{(s_1-e_4)(s_1-e_5)}+\sqrt{(s_2-e_4)(s_2-e_5)}}{s_1-s_2};$$

alors il vient

$$\frac{rx_2+\gamma_3}{\sqrt{R(x_2)}}=-\frac{\sqrt{(s_1-e_4)(s_1-e_5)}-\sqrt{(s_2-e_4)(s_2-e_5)}}{s_1-s_2}.$$

De ces équations on tire

$$r=\frac{\sqrt{(s_1-e_4)(s_1-e_5)}}{s_1-s_2}\frac{\sqrt{R(x_1)}+\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}+\frac{\sqrt{(s_2-e_4)(s_2-e_5)}}{s_1-s_2}\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2},$$

$$\gamma_3=-\frac{\sqrt{(s_1-e_4)(s_1-e_5)}}{s_1-s_2}\frac{x_2\sqrt{R(x_1)}+x_1\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}$$

$$-\frac{\sqrt{(s_2-e_4)(s_2-e_5)}}{s_1-s_2}\frac{x_2\sqrt{R(x_1)}-x_1\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}.$$

Au moyen des équations (8 a), (8 b) on tire ensuite

$$r=\sqrt{2}\,\frac{\sum\frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}\frac{P_a}{s_1-s_2}\left(\sqrt{(s_1-e_4)(s_1-e_5)}\frac{\sqrt{\varphi(s_2)}}{s_2-e_a}-\sqrt{(s_2-e_4)(s_2-e_5)}\frac{\sqrt{\varphi(s_1)}}{s_1-e_a}\right)}{\sum\frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}P_a}.$$

Or, on a

$$\sqrt{\varphi(s_2)}=\frac{P_a P_\beta P_\gamma\sqrt{\varphi(s_1)}}{(s_1-e_a)(s_1-e_\beta)(s_1-e_\gamma)},\qquad \sqrt{\varphi(s_1)}=\frac{P_a P_\beta P_\gamma\sqrt{\varphi(s_2)}}{(s_2-e_a)(s_2-e_\beta)(s_2-e_\gamma)}$$

et par suite

$$\frac{P_\alpha}{s_1 - s_2}\left(\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)}\frac{\sqrt{\varphi(s_2)}}{s_2 - e_\alpha} - \sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}\frac{\sqrt{\varphi(s_1)}}{s_1 - e_\alpha}\right)$$
$$= \frac{P_\beta P_\gamma}{s_1 - s_2}\left(\frac{S_1}{(s_1 - e_\beta)(s_1 - e_\gamma)} - \frac{S_2}{(s_2 - e_\beta)(s_2 - e_\gamma)}\right) = P_{\beta\gamma},$$

de manière qu'il vient

$$r = \sqrt{2}\,\frac{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\beta\gamma}}{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha}. \tag{13}$$

On a de plus

$$2\,\frac{x_2\sqrt{R(x_1)} - x_1\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = (x_1 - x_2)\left\{\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\,\frac{\sqrt{R(x_1)} - \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} - \frac{\sqrt{R(x_1)} + \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2}\right\}$$
$$= -\sqrt{2}\,\frac{(x_1 - x_2)}{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha}\left\{\left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha\right)\left(\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}\,\frac{P_\alpha}{s_1 - e_\alpha}\right)\sqrt{\varphi(s_1)}\right.$$
$$\left. + \left(\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}\,\frac{P_\alpha}{s_2 - e_\alpha}\right)\sqrt{\varphi(s_2)}\right\}.$$

Le second terme dans la parenthèse peut s'écrire

$$\sum_\alpha \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}\,\frac{P_\beta P_\gamma \sqrt{\varphi(s_1)}}{(s_1 - e_\beta)(s_1 - e_\gamma)} = -\sum_\alpha \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\beta)\varphi'(e_\gamma)}\,\frac{P_\beta P_\gamma \sqrt{\varphi(s_1)}\,(e_\beta - e_\gamma)^2}{(s_1 - e_\beta)(s_1 - e_\gamma)}$$
$$= -\sum_{\beta \neq \gamma} \frac{\sqrt{2e_\alpha}(e_\beta - e_\gamma)}{\varphi'(e_\beta)\varphi'(e_\gamma)}\,\frac{P_\gamma P_\beta}{s_1 - e_\beta}\sqrt{\varphi(s_1)},$$

tandis que le premier terme devient égal à

$$\sqrt{\varphi(s_1)}\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{(\varphi'(e_\alpha))^2}\,\frac{P_\alpha^2}{s_1 - e_\alpha} + \sqrt{\varphi(s_1)}\sum_{\beta \neq \gamma} \frac{\sqrt{e_\alpha e_\beta}\sqrt{2e_\beta}}{\varphi'(e_\beta)\varphi'(e_\gamma)}\,\frac{P_\beta P_\gamma}{s_1 - e_\beta},$$

de manière qu'on a pour la somme dans la parenthèse l'expression

$$\sqrt{\varphi(s_1)}\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{(\varphi'(e_\alpha))^2}\,\frac{P_\alpha^2}{s_1 - e_\alpha} + \sqrt{\varphi(s_1)}\sum_{\beta \neq \gamma} \frac{\sqrt{2e_\gamma}\sqrt{e_\alpha e_\gamma}}{\varphi'(e_\beta)\varphi'(e_\gamma)}\,\frac{P_\beta P_\gamma}{s_1 - e_\beta}$$
$$= \sqrt{\varphi(s_1)}\left(\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha\right)\left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)}\,\frac{P_\alpha}{s_1 - e_\alpha}\right).$$

Si on remplace enfin $x_1 - x_2$ par sa valeur, on obtient définitivement

$$(14\text{a}) \qquad \frac{x_2\sqrt{R(x_1)} - x_1\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = \sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_1)}\,\frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)}\frac{P_\alpha}{s_1 - e_\alpha}}{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_\alpha}.$$

D'une manière toute semblable on obtient

$$(14\text{b}) \qquad \frac{x_2\sqrt{R(x_1)} + x_1\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = -\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_2)}\,\frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)}\frac{P_\alpha}{s_2 - e_\alpha}}{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_\alpha}.$$

En se servant de ces valeurs, on obtient, de la même manière qu'en déterminant r,

$$(15) \qquad r_3 = \sqrt{2}\,\frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)}P_{\beta\gamma}}{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_\alpha}.$$

Pour la détermination des grandeurs s_1 et s_2 comme fonctions du temps nous procéderons comme il suit. On a, comme il est facile de le voir,

$$\frac{\sqrt{R(x_1)} - \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = +\,2\sqrt{2}\,\frac{\frac{\partial x_1}{\partial s_1} - \frac{\partial x_2}{\partial s_1}}{x_1 - x_2}\sqrt{\varphi(s_1)},$$

$$\frac{\sqrt{R(x_1)} + \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = -\,2\sqrt{2}\,\frac{\frac{\partial x_1}{\partial s_2} - \frac{\partial x_2}{\partial s_2}}{x_1 - x_2}\sqrt{\varphi(s_2)},$$

$$\frac{x_2\sqrt{R(x_1)} - x_1\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = -\,2\sqrt{2}\,\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\right)\frac{x_1 - x_2}{2}\sqrt{\varphi(s_1)}$$

$$= +\,2\sqrt{2}\,\frac{x_2\frac{\partial x_1}{\partial s_1} - x_1\frac{\partial x_2}{\partial s_1}}{x_1 - x_2}\sqrt{\varphi(s_1)},$$

$$\frac{x_2\sqrt{R(x_1)} + x_1\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = +\,2\sqrt{2}\,\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\right)\frac{x_1 - x_2}{2}\sqrt{\varphi(s_2)}$$

$$= -\,2\sqrt{2}\,\frac{x_2\frac{\partial x_1}{\partial s_2} - x_1\frac{\partial x_2}{\partial s_2}}{x_1 - x_2}\sqrt{\varphi(s_2)}$$

et par suite

$$2\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_1)}\frac{\partial x_1}{\partial s_1} = \sqrt{R(x_1)}, \qquad 2\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_1)}\frac{\partial x_2}{\partial s_1} = \sqrt{R(x_2)},$$

$$2\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_2)}\frac{\partial x_1}{\partial s_2} = -\sqrt{R(x_1)}, \qquad 2\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_2)}\frac{\partial x_2}{\partial s_2} = \sqrt{R(x_2)}.$$

Par suite entre x_1 et x_2 d'un côté, s_1 et s_2 de l'autre existent les deux équations différentielles

$$2\sqrt{2}\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} = \frac{ds_1}{\sqrt{\varphi(s_1)}} - \frac{ds_2}{\sqrt{\varphi(s_2)}}, \tag{16 a}$$

$$2\sqrt{2}\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{ds_1}{\sqrt{\varphi(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{\varphi(s_2)}}. \tag{16 b}$$

Mais on a de plus d'après les équations différentielles du problème

$$2\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} = -i\frac{rx_1+\gamma_3}{\sqrt{R(x_1)}}dt = -i\frac{\sqrt{(s_1-e_4)(s_1-e_5)}+\sqrt{(s_2-e_4)(s_2-e_5)}}{s_1-s_2}dt,$$

$$2\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = +i\frac{rx_2+\gamma_3}{\sqrt{R(x_2)}}dt = -i\frac{\sqrt{(s_1-e_4)(s_1-e_5)}-\sqrt{(s_2-e_4)(s_2-e_5)}}{s_1-s_2}dt.$$

En nous servant de ces deux équations, nous tirons

$$\frac{ds_1}{S_1} = -i\sqrt{2}\frac{dt}{s_1-s_2},$$

$$\frac{ds_2}{S_2} = +i\sqrt{2}\frac{dt}{s_1-s_2}$$

et par suite

$$\frac{s_1ds_1}{S_1} + \frac{s_2ds_2}{S_2} = -i\sqrt{2}dt, \tag{17 a}$$

$$\frac{ds_1}{S_1} + \frac{ds_2}{S_2} = 0. \tag{17 b}$$

§ 3. *Décomposition du mouvement.*

Si on désigne par $u + iv$ une grandeur complexe de module 1, alors les grandeurs γ_1' et γ_2' qu'on tire de

$$\gamma_1' + i\gamma_2' = (\gamma_1 + i\gamma_2)(u + iv)$$

et la grandeur γ_3 peuvent être considérées comme les cosinus directeurs de la verticale par rapport à un nouveau système de coordonnées dont le 3^e^ axe se confond avec l'axe des Z fixe dans le corps. Le premier axe du nouveau système forme avec les axes des X et les Y les cosinus directeurs u et $-v$, pendant que le second a les cosinus directeurs v et u.

Le mouvement relatif du nouveau système de coordonnées par rapport à celui qui est fixe dans le corps est donc une rotation autour de l'axe des Z de ce dernier avec la vitesse angulaire

$$\rho = -i\frac{d\ln(u - iv)}{dt} = i\frac{d\ln(n + iv)}{dt}.$$

Les composantes de la vitesse de rotation du nouveau système par rapport aux axes fixes dans le corps sont donc

$$p\,,\; q\,,\; r + \rho.$$

De là résulte que les composantes de la vitesse de rotation du nouveau système par rapport à ses propres axes se déduisent des équations

$$p' + iq' = (p + iq)(u + iv),$$

$$r' = r + \rho.$$

Nous savons que $\sqrt{\xi_1}$ et $\sqrt{\xi_2}$ sont deux grandeurs conjuguées dont le module est k. Nous pouvons donc considérer

$$u + iv = \frac{\sqrt{\xi_2}}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad u - iv = \frac{\sqrt{\xi_1}}{\sqrt{k}}$$

comme des grandeurs qui satisfont aux conditions requises. Comme on a $2k = e_5 - e_4$, on tire en se servant des équations (9 a), (9 b)

$$u \pm iv = \frac{1}{\sqrt{e_5 - e_4}} \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 4} \mp \sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha} \tag{18}$$

et encore

$$\gamma_1' \pm i\gamma_2' = \frac{1}{\sqrt{e_5 - e_4}} \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} (e_\alpha - e_4) P_{\alpha 4} \mp \sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} (e_\alpha - e_5) P_{\alpha 5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha}, \tag{19}$$

$$p' \pm iq' = -\frac{1}{\sqrt{e_5 - e_4}} \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 4} \mp \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha}. \tag{20}$$

Nous avions déduit plus haut

$$\frac{d \ln \xi_2}{dt} = ir.$$

Par suite on a

$$\rho = i \frac{d \ln(u + iv)}{dt} = \frac{i}{2} \frac{d \ln \xi_2}{dt} = -\frac{r}{2}$$

et encore

$$r' = r + \rho = \frac{1}{2} r = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\beta\gamma}}{\sum \frac{\sqrt{2e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha}. \tag{21}$$

De là se déduit l'ensemble suivant de formules

$$\gamma_1' = \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} (e_\alpha - e_4) P_{\alpha 4}}{\sqrt{e_5 - e_4} \sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha}, \qquad \gamma_2' = i \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} (e_\alpha - e_5) P_{\alpha 5}}{\sqrt{(e_5 - e_4)} \sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha},$$

$$\gamma_3' = \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\beta\gamma}}{\sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha},$$

$$p' = -\frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 4}}{\sqrt{2}\sqrt{e_5 - e_4} \sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha}, \qquad q' = -i \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 5}}{\sqrt{2}\sqrt{e_5 - e_4} \sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha},$$

$$r' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\beta\gamma}}{\sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha},$$

$$u = \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 4}}{\sqrt{e_5 - e_4} \sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha}, \qquad v = i \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 5}}{\sqrt{e_5 - e_4} \sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha}.$$

Ces grandeurs satisfont aux équations différentielles suivantes qu'on déduit facilement des équations différentielles du problème

$$\frac{d\gamma_1'}{dt} = r'\gamma_2' - q'\gamma_3', \tag{22 a}$$

$$\frac{d\gamma_2'}{dt} = p'\gamma_3' - r'\gamma_1', \tag{22 b}$$

$$\frac{d\gamma_3'}{dt} = q'\gamma_1' - p'\gamma_2', \tag{22 c}$$

$$2\frac{dp'}{dt} = \gamma_3' v, \tag{23 a}$$

$$2\frac{dq'}{dt} = -\gamma_3' u, \tag{23 b}$$

$$2\frac{dr'}{dt} = \gamma_2' u - \gamma_1' v, \tag{23 c}$$

$$\frac{du}{dt} = -r'v, \tag{24 a}$$

$$\frac{dv}{dt} = r'u. \tag{24 b}$$

§ 4. *Représentation des coefficients de $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3', p', q', r'$ au moyen de fonctions hyperelliptiques.*

Pour la détermination des cosinus directeurs du nouveau système par rapport aux deux axes horizontaux du système fixe dans l'espace il est d'une extrême importance que les coefficients constants dans les expressions précédentes puissent s'exprimer au moyen de fonctions hyperelliptiques.

Cette représentation dépend essentiellement de l'équation

$$\varphi(z) \equiv z(z^2 - 6l_1 z + 9l_1^2 + 1 - k^2) - 2l^2 = 0, \tag{25}$$

dont les racines sont les grandeurs e_1, e_2, e_3. Nous pouvons l'écrire aussi

$$\varphi(z) = z(z - e_4)(z - e_5) + z - 2l^2 = 0,$$

de manière que pour une valeur quelconque de z on a

$$2l^2 - z = z(z - e_4)(z - e_5) - (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

Si nous posons $z = e_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, nous obtenons

$$2l^2 - e_\alpha = e_\alpha(e_\alpha - e_4)(e_\alpha - e_5). \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Mais si on a $z = e_\delta$, δ désignant l'un des indices 4 ou 5, nous obtenons

$$2l^2 - e_\delta = -(e_\delta - e_1)(e_\delta - e_2)(e_\delta - e_3) = (e_1 - e_\delta)(e_2 - e_\delta)(e_3 - e_\delta).$$

Si nous attribuons aux grandeurs $\sqrt{e_1}, \sqrt{e_2}, \sqrt{e_3}$ la même signification que précédemment, et si de plus nous déterminons les radicaux $\sqrt{e_\alpha - e_4}$ et $\sqrt{e_\alpha - e_5}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, nous pouvons définir de nouveaux radicaux par les égalités

$$\sqrt{2l^2 - e_\alpha} = \sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\alpha - e_4}\sqrt{e_\alpha - e_5}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{26}$$

$$\sqrt{2l^2 - e_\delta} = \sqrt{e_1 - e_\delta}\sqrt{e_2 - e_\delta}\sqrt{e_3 - e_\delta}. \qquad (\delta = 4, 5) \tag{27}$$

Et comme $\sqrt{e_\alpha}\sqrt{e_\beta}\sqrt{e_\gamma} = l\sqrt{2}$, nous en tirons l'égalité

$$\sqrt{2l^2 - e_1}\sqrt{2l^2 - e_2}\sqrt{2l^2 - e_3} = l\sqrt{2}\,\sqrt{2l^2 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_5}. \tag{28}$$

Nous poserons encore

$$R(z) = \varphi(z)(z - e_4)(z - e_5)$$

et définissons alors les radicaux $\sqrt{R'(e_a)}$ par les égalités suivantes

(29 a) $$\sqrt{R'(e_a)} = \sqrt{\varphi'(e_a)}\sqrt{e_a - e_4}\sqrt{e_a - e_5}, \qquad (a = 1, 2, 3)$$

(29 b) $$\sqrt{R'(e_4)} = \sqrt{e_5 - e_4}\sqrt{-\varphi(e_4)} = \sqrt{e_5 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_4},$$

(29 c) $$\sqrt{R'(e_5)} = i\sqrt{e_5 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_5}.$$

Les radicaux $\sqrt{\varphi'(e_a)}$ doivent être déterminés de manière que, si α, β, γ désigne une permutation circulaire des nombres 1, 2, 3, on ait

$$\sqrt{\varphi'(e_\alpha)}\sqrt{\varphi'(e_\beta)}\sqrt{\varphi'(e_\gamma)} = -i(e_\alpha - e_\beta)(e_\beta - e_\gamma)(e_\gamma - e_\alpha) = i\varphi'(e_\alpha)(e_\beta - e_\gamma).$$

Enfin la signification de $\sqrt{e_4 - e_a}$ et $\sqrt{e_5 - e_a}$ doit être prise telle que l'on ait

$$\sqrt{e_4 - e_a}\sqrt{e_5 - e_a} = \sqrt{e_a - e_4}\sqrt{e_a - e_5}.$$

Si dans $P(s_1, s_2)_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4, 5)$ nous prenons pour s_1, s_2 une paire de valeurs $s_1' = \frac{1}{\tau^2}$, s_2', on peut développer P_α suivant les puissances de τ. Nous obtenons

(30) $$P\left(s_2', \frac{1}{\tau^2}\right)_\alpha = \frac{1}{\tau}P(s_2')_\alpha^{(-1)} + \sum_{m=0}^{\infty}\tau^m P(s_2')_\alpha^{(m)}.$$

Il vient

(30 a) $$P(s_2')_\alpha^{(-1)} = \sqrt{s_2' - e_\alpha},$$ (30 b) $$P(s_2')_\alpha^{(0)} = 0,$$

(30 c) $$P(s_2')_\alpha^{(+1)} = -\frac{1}{2}e_\alpha\sqrt{s_2' - e_\alpha}, \ldots.$$

On peut développer de même $P\left(\frac{1}{\tau^2}, s_2'\right)_{\alpha\beta}$ et on obtient

(31 a) $$P(s_2')_{\alpha\beta}^{(-1)} = \sqrt{s_2' - e_\alpha}\sqrt{s_2' - e_\beta},$$

(31 b) $$P(s_2')_{\alpha\beta}^{0} = -\sqrt{s_2' - e_\gamma}\sqrt{s_2' - e_\delta}\sqrt{s_2' - e_\varepsilon},$$

(31 c) $$P(s_2')_{\alpha\beta}^{(1)} = \left(s_2 - \frac{1}{2}(e_\gamma + e_\delta + e_\varepsilon)\right)\sqrt{s_2' - e_\alpha}\sqrt{s_2' - e_\beta}, \ldots.$$

Nous posons encore

$$(32\text{ a})\qquad Q(s_1\,,\,s_2)_\alpha = \frac{P(s_1\,,\,s_2)_\alpha}{\sqrt[4]{R'(e_\alpha)}}; \qquad (32\text{ b})\qquad Q(s_2)_\alpha^{(\mu)} = \frac{P(s_2)_\alpha^{(\mu)}}{\sqrt[4]{R'(e_\alpha)}},$$

$$(33\text{ a})\qquad Q(s_1\,,\,s_2)_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{R'(e_\alpha)}\sqrt[4]{R'(e_\beta)}} P(s_1\,,\,s_2)_{\alpha\beta},$$

$$(33\text{ b})\qquad Q(s_2)_{\alpha\beta}^{(\mu)} = \frac{\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\,P(s_2)_{\alpha\beta}^{(\mu)}}{\sqrt[4]{R'(e_\alpha)}\sqrt[4]{R'(e_\beta)}}.$$

Nous considérons les grandeurs $Q(s_1\,,\,s_2)_\mu$ comme des fonctions de

$$(34)\qquad \begin{aligned} v_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\int_{a_1} \frac{s_1 ds_1}{S_1} + \int_{a_2} \frac{s_2 ds_2}{S_2}\right), \\ v_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\int_{a_1} \frac{ds_1}{S_1} + \int_{a_2} \frac{ds_2}{S_2}\right), \end{aligned}$$

où a_1 et a_2 sont des constantes. Si nous prenons maintenant pour $s_1\,,\,s_2$ la paire de valeurs $s'_2\,,\,\frac{1}{\tau^2}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \bar{v}'_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\int_{a_1}^{s'_2} \frac{s_2 ds_2}{S_2} + \int_{a_2}^{\infty} \frac{s_1 ds_1}{S_1}\right) - i\tau\sqrt{2}\,\mathfrak{P}(\tau^2) \\ &= v'_1 - i\tau\sqrt{2}\left(1 + \frac{e}{3}\tau^2 + \ldots\right), \\ \bar{v}'_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\int_{a_1}^{s'_2} \frac{ds_2}{S_2} + \int_{a_2}^{\infty} \frac{ds_1}{S_1}\right) - i\tau\sqrt{2}\,\mathfrak{P}(\tau^2) \\ &= v'_2 - i\sqrt{2}\left(\frac{\tau^3}{3} + \frac{e}{5}\tau^5 + \ldots\right), \end{aligned}$$

où nous avons écrit e pour $\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5)$. En regardant maintenant la fonction $Q(s_1\,,\,s_2)_\mu$ comme fonction de $v_1\,,\,v_2$ nous pouvons la poser égale à

$$\frac{R(v_1\,,\,v_2)_\mu}{R(v_1\,,\,v_2)},$$

où $R(v_1, v_2)$ doit devenir infiniment petit de premier ordre, quand $\tau = s_1^{-\frac{1}{2}}$ est infiniment petit.

Nous prendrons pour v_1, v_2 les valeurs $\bar{v}_1', \bar{v}_2'$ et nous allons développer suivant les puissances de τ. Si nous posons pour abréger

$$\text{(35 a)} \qquad \frac{i}{\sqrt{2}\,\dfrac{\partial R(v_1', v_2')}{\partial v_1'}} = \lambda, \qquad \text{(35 b)} \qquad \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 R(v_1', v_2')}{\partial v_1'^2}}{\dfrac{\partial R(v_1', v_2')}{\partial v_1'}} = m,$$

$$\text{(35 c)} \qquad \frac{1}{3}\left(\frac{\dfrac{\partial^3 R(v_1', v_2')}{\partial v_1'^3} - \dfrac{\partial R}{\partial v_2'}}{\dfrac{\partial R}{\partial v_1'}} - e\right) = n,$$

nous obtenons

$$Q(s_2')_\mu^{(-1)} = \lambda R(v_1', v_2')_\mu,$$

$$Q(s_2')_\mu^{(0)} = -i\sqrt{2}\,\lambda\left(\frac{\partial R(v_1', v_2')_\mu}{\partial v_1'} - mR(v_1', v_2')_\mu\right),$$

$$Q(s_2')_\mu^{(1)} = -\lambda\left(\frac{\partial^2 R(v_1', v_2')_\mu}{\partial v_1'^2} - 2m\frac{\partial R(v_1', v_2')_\mu}{\partial v_1'} + (2m^2 - n)R(v_1', v_2')_\mu\right).$$

Or, on a

$$\frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} = \frac{\sqrt{e_a}(e_a - e_4)(e_a - e_5)}{R'(e_a)} = \frac{\sqrt{e_a}\sqrt{e_a - e_4}\sqrt{e_a - e_5}\sqrt{e_a - e_4}\sqrt{e_a - e_5}}{(\sqrt[4]{R'(e_a)})^4}$$

$$= \frac{\sqrt{2l^2 - e_a}\sqrt{e_a - e_4}\sqrt{e_a - e_5}}{(\sqrt[4]{R'(e_a)})^4}.$$

D'après cela nous obtenons pour le dénominateur commun

$$\sum P_a \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} = \Sigma Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} Q(2l^2)_a^{(-1)} Q(s_1, s_2)_a.$$

De plus on a

$$\frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_a}}{\sqrt{e_5 - e_4}\,\varphi'(e_a)} = \frac{(e_a - e_4)\sqrt{2l^2 - e_4}\,(e_a - e_4)(e_a - e_5)\sqrt{e_a}}{R'(e_a)\sqrt{R'(e_4)}}$$

$$= \frac{(\sqrt{e_a - e_4})^2\sqrt{2l^2 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_a}\sqrt{e_4 - e_a}\sqrt{e_5 - e_a}}{(\sqrt[4]{R'(e_a)})^4(\sqrt[4]{R'(e_4)})^2}$$

et par suite

$$\sum \frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_a}}{\sqrt{e_5 - e_4}\,\varphi'(e_a)} P_{a4} = \sum Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} Q(2l^2)_{a4}^{(-1)} Q(s_1, s_2)_{a4}.$$

D'où il résulte

$$i\sum \frac{(e_a - e_5)\sqrt{e_a}}{\sqrt{e_5 - e_4}\,\varphi'(e_a)} P_{a5} = \sum Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} Q(2l^2)_{a5}^{(-1)} Q(s_1, s_2)_{a5}.$$

Pour trouver le numérateur du 3^{me} cosinus, nous écrivons

$$\frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} = i\,\frac{(e_\beta - e_\gamma)\sqrt{e_\beta}\sqrt{e_\gamma}\sqrt{e_a - e_4}\sqrt{e_a - e_5}\sqrt{e_\beta - e_4}\sqrt{e_\beta - e_5}\sqrt{e_\gamma - e_4}\sqrt{e_\gamma - e_5}}{\sqrt{R'(e_a)}\sqrt{R'(e_\beta)}\sqrt{R'(e_\gamma)}}$$

$$= i\,\frac{(e_\beta - e_\gamma)\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma}}{\sqrt{R'(e_\beta)}\sqrt{R'(e_\gamma)}}\;\frac{\sqrt{e_4 - e_a}\sqrt{e_5 - e_a}}{\sqrt{R'(e_a)}}.$$

Par suite on a

$$\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{\beta\gamma} = i\sum Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} Q(2l^2)_{\beta\gamma}^{(-1)} Q(s_1, s_2)_{\beta\gamma}.$$

Les numérateurs de p', q', r' s'expriment aussi de cette manière. On a

$$\frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\sqrt{e_5 - e_4}\,\varphi'(e_a)} = \frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_\beta e_\gamma}\sqrt{2l^2 - e_4}\,(e_a - e_5)}{\sqrt{R'(e_4)}\,R'(e_a)}$$

$$= \frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_a - e_4}\sqrt{e_a - e_5}}{\sqrt{R'(e_4)}\,R(e_a)}\;\frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}\sqrt{2l^2 - e_4}\sqrt{e_a - e_5}}{\sqrt{e_a - e_4}}.$$

Nous multiplions les deux termes du dernier facteur par $\sqrt{e_a}\sqrt{e_a - e_5}$ et obtenons alors

$$\frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_a - e_5}\sqrt{e_a - e_4}}{\sqrt{R'(e_4)}\,R'(e_a)}\;\frac{l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_4}\,(e_a - e_5)}{\sqrt{2l^2 - e_a}}$$

$$= \frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_a - e_5}\sqrt{e_a - e_4}}{\sqrt{R'(e_4)}\,R'(e_a)}\left\{\frac{l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_4}\,(2l^2 - e_5)}{\sqrt{2l^2 - e_a}} - l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_a}\right\}$$

$$= \frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_a - e_5}\sqrt{e_a - e_4}}{\sqrt{R'(e_4)}\,R'(e_a)}\left\{\sqrt{2l^2 - e_5}\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma} - l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_a}\right\}.$$

D'après cela les numérateurs de p' et q' deviennent

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)\sqrt{e_5-e_4}}P_{\alpha 4}$$

$$=\sum Q(e_4)_\alpha^{(-1)}Q(e_5)_\alpha^{(-1)}\left\{\frac{Q(2l^2)_{\alpha 4}^{(0)}}{\sqrt{2}}+lQ(2l^2)_{\alpha 4}^{(-1)}\right\}Q(s_1\,,\,s_2)_{\alpha 4},$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\sum\frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_\alpha)\sqrt{e_5-e_4}}P_{\alpha 5}$$

$$=\sum Q(e_4)_\alpha^{(-1)}Q(e_5)_\alpha^{(-1)}\left\{\frac{Q(2l^2)_{\alpha 5}^{0}}{\sqrt{2}}+lQ(2l^2)_{\alpha 5}^{(-1)}\right\}Q(s_1\,,\,s_2)_{\alpha 5}.$$

Les coefficients du numérateur de r' ont la forme

$$\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}=i\frac{(e_\beta-e_\gamma)\sqrt{e_\alpha}\sqrt{2l^2-e_4}\sqrt{2l^2-e_5}}{\sqrt{R'(e_\alpha)}\sqrt{R'(e_\beta)}\sqrt{R'(e_\gamma)}}$$

$$=i\frac{(e_\beta-e_\gamma)\sqrt{e_\alpha-e_4}\sqrt{e_\alpha-e_5}}{\sqrt{R'(e_\alpha)}\sqrt{R'(e_\beta)}\sqrt{R'(e_\gamma)}}\;\frac{e_\alpha\sqrt{2l^2-e_4}\sqrt{2l^2-e_5}}{\sqrt{2l^2-e_\alpha}}$$

$$=i\frac{(e_\beta-e_\gamma)\sqrt{e_4-e_\alpha}\sqrt{e_5-e_\alpha}}{\sqrt{R'(e_\alpha)}\sqrt{R'(e_\beta)}\sqrt{R'(e_\gamma)}}\left\{-\sqrt{2l^2-e_\alpha}\sqrt{2l^2-e_4}\sqrt{2l^2-e_5}+\frac{2l^2\sqrt{2l^2-e_4}\sqrt{2l^2-e_5}}{\sqrt{2l^2-e_\alpha}}\right\}$$

$$=i\frac{(e_\beta-e_\gamma)\sqrt{e_4-e_\alpha}\sqrt{e_5-e_\alpha}}{\sqrt{R'(e_\alpha)}\sqrt{R'(e_\beta)}\sqrt{R'(e_\gamma)}}\left\{-\sqrt{2l^2-e_\alpha}\sqrt{2l^2-e_4}\sqrt{2l^2-e_5}+l\sqrt{2}\sqrt{2l^2-e_\beta}\sqrt{2l^2-e_\gamma}\right\}.$$

D'après cela le numérateur de r' devient égal à

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}P_{\alpha\gamma}=i\sum Q(e_4)_\alpha^{(-1)}Q(e_5)_\alpha^{(-1)}\left\{\frac{Q(2l^2)_{\beta\gamma}^{0}}{\sqrt{2}}+l\,Q(2l^2)_{\beta\gamma}^{-1}\right\}Q(s_1\,,\,s_2)_{\beta\gamma}.$$

Enfin pour transformer encore les numérateurs de u et v, nous divisons l'égalité obtenue plus haut

$$\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)}=\frac{\sqrt{e_4-e_\alpha}\sqrt{e_5-e_\alpha}}{\sqrt{R'(e_\alpha)}}\sqrt{2l^2-e_\alpha}$$

par $\sqrt{e_5 - e_4} = \sqrt{R'(e_4)} : \sqrt{2l^2 - e_4}$. Alors nous obtenons

$$\frac{\sqrt{e_\alpha}}{\sqrt{e_5 - e_4}\,\varphi'(e_\alpha)} = \frac{(e_\alpha - e_4)\sqrt{e_4 - e_\alpha}\sqrt{e_5 - e_\alpha}}{R'(e_\alpha)\sqrt{R'(e_4)}} \frac{\sqrt{2l^2 - e_\alpha}\sqrt{2l^2 - e_4}}{e_\alpha - e_4}$$

$$= \frac{(e_\alpha - e_4)\sqrt{e_4 - e_\alpha}\sqrt{e_5 - e_\alpha}}{R'(e_\alpha)\sqrt{R'(e_4)}} \frac{(e_\beta - e_4)(e_\gamma - e_4)\sqrt{2l^2 - e_\alpha}\sqrt{2l^2 - e_4}}{2l^2 - e_4}$$

$$= \frac{(e_\alpha - e_4)\sqrt{e_4 - e_\alpha}\sqrt{e_5 - e_\alpha}}{R'(e_\alpha)\sqrt{R'(e_4)}} \Big\{ (2l^2 - e_4 - (2l^2 - e_\beta + 2l^2 - e_\gamma))\sqrt{2l^2 - e_\alpha}\sqrt{2l^2 - e_4}$$
$$+ \frac{(2l^2 - e_\beta)(2l^2 - e_\gamma)\sqrt{2l^2 - e_\alpha}\sqrt{2l^2 - e_4}}{2l^2 - e_4} \Big\}$$

$$= \frac{(e_\alpha - e_4)\sqrt{e_4 - e_\alpha}\sqrt{e_5 - e_\alpha}}{R'(e_\alpha)\sqrt{R'(e_4)}} \Big\{ -(2l^2 - (e_\beta + e_\gamma - e_4))\sqrt{2l^2 - e_\alpha}\sqrt{2l^2 - e_4}$$
$$+ l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma}\sqrt{2l^2 - e_5} \Big\}$$

$$= \frac{(e_\alpha - e_4)\sqrt{e_4 - e_\alpha}\sqrt{e_5 - e_\alpha}}{R'(e_\alpha)\sqrt{R'(e_4)}} \Big\{ -2\left(2l^2 - \frac{1}{2}(e_\beta + e_\gamma + e_5)\right)\sqrt{2l^2 - e_\alpha}\sqrt{2l^2 - e_4}$$
$$+ l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma}\sqrt{2l^2 - e_5}$$
$$+ (2l^2 - (e_4 + e_5))\sqrt{2l^2 - e_\alpha}\sqrt{2l^2 - e_4} \Big\}.$$

Nous déduisons de la même manière

$$\frac{i\sqrt{e_\alpha}}{\sqrt{e_5 - e_4}\,\varphi'(e_\alpha)} = \frac{(e_\alpha - e_5)\sqrt{e_4 - e_\alpha}\sqrt{e_5 - e_\alpha}}{R'(e_\alpha)\sqrt{R'(e_5)}} \Big\{ -2\left(2l^2 - \frac{1}{2}(e_\beta + e_\gamma + e_4)\right)\sqrt{2l^2 - e_\alpha}\sqrt{2l^2 - e_5}$$
$$+ l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma}\sqrt{2l^2 - e_4}$$
$$+ (2l^2 - e_4 - e_5)\sqrt{2l^2 - e_\alpha}\sqrt{2l^2 - e_5} \Big\}.$$

Nous obtenons par suite

$$\sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\sqrt{e_5 - e_4}\,\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 4} =$$
$$-\sum Q(e_4)_\alpha^{(-1)} Q(e_5)_\alpha^{(-1)} \{2\,Q(2l^2)_{\alpha 4}^{(+1)} + l\sqrt{2}\,Q(2l^2)_{\alpha 4}^{(0)} - (2l^2 - e_4 - e_5)\,Q(2l^2)_{\alpha 4}^{(-1)}\} Q(s_1, s_2)_{\alpha 4},$$

$$i\sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\sqrt{e_5 - e_4}\,\varphi'(e_\alpha)} P_{\alpha 5} =$$
$$-\sum Q(e_4)_\alpha^{(-1)} Q(e_5)_\alpha^{(-1)} \{2\,Q(2l^2)_{\alpha 5}^{(+1)} + l\sqrt{2}\,Q(2l^2)_{\alpha 5}^{(0)} - (2l^2 - e_4 - e_5)\,Q(2l^2)_{\alpha 5}^{(-1)}\} Q(s_1, s_2)_{\alpha 5}.$$

Il est remarquable qu'une grandeur qui se compose avec le numérateur de γ_3' de la même manière que les deux expressions précédentes avec les numérateurs de γ_1', γ_2', a la valeur zéro. C'est

$$2Q(2l^2)^{(+1)}_{\beta\gamma} + l\sqrt{2}\,Q(2l^2)^{(0)}_{\beta\gamma} - (2l^2 - e_4 - e_5)Q(2l^2)^{(-1)}_{\beta\gamma}$$

$$= (4l^2 - (e_\alpha + e_4 + e_5))\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma} - l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_5}\sqrt{2l^2 - e_\alpha}$$

$$- (2l^2 - e_4 - e_5)\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma}$$

$$= (2l^2 - e_\alpha)\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma} - l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_5}\sqrt{2l^2 - e_\alpha}$$

$$= (2l^2 - e_\alpha)\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma} - \sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma}(2l^2 - e_\alpha) = 0.$$

Si nous désignons de plus par v_1'', v_2'' et v_1''', v_2''' les couples de valeurs que prennent v_1, v_2 lorsque $s_1 = e_4$, $s_2 = \infty$ et $s_1 = e_5$, $s_2 = \infty$, nous obtenons immédiatement

$$(36\text{a})\qquad \gamma_1' = \frac{\Sigma R(v_1'', v_2'')_\alpha R(v_1''', v_2''')_\alpha R(v_1', v_2')_{\alpha 4} R(v_1, v_2)_{\alpha 4}}{\Sigma R(v_1'', v_2'')_\alpha R(v_1''', v_2''')_\alpha R(v_1', v_2')_\alpha R(v_1, v_2)_\alpha},$$

$$(36\text{b})\qquad \gamma_2' = \frac{\Sigma R(v_1'', v_2'')_\alpha R(v_1''', v_2''')_\alpha R(v_1', v_2')_{\alpha 5} R(v_1, v_2)_{\alpha 5}}{\Sigma R(v_1'', v_2'')_\alpha R(v_1''', v_2''')_\alpha R(v_1', v_2')_\alpha R(v_1, v_2)_\alpha},$$

$$(36\text{c})\qquad \gamma_3' = i\,\frac{\Sigma R(v_1'', v_2'')_\alpha R(v_1''', v_2''')_\alpha R(v_1', v_2')_{\beta\gamma} R(v_1, v_2)_{\beta\gamma}}{\Sigma R(v_1'', v_2'')_\alpha R(v_1''', v_2''')_\alpha R(v_1', v_2')_\alpha R(v_1, v_2)_\alpha}.$$

Si nous désignons par $\Delta F(v_1', v_2')$ le résultat de l'opération

$$(l + im)F(v_1', v_2') - i\,\frac{\partial F(v_1', v_2')}{\partial v_1'},$$

nous obtenons

$$(37\text{a})\qquad p' = \frac{\Sigma R(v_1'', v_2'')_\alpha R(v_1''', v_2''')_\alpha (\Delta R(v_1', v_2')_{\alpha 4}) R(v_1, v_2)_{\alpha 4}}{\Sigma R(v_1'', v_2'')_\alpha R(v_1''', v_2''')_\alpha R(v_1', v_2')_\alpha R(v_1, v_2)_\alpha},$$

$$(37\text{b})\qquad q' = \frac{\Sigma R(v_1'', v_2'')_\alpha R(v_1''', v_2''')_\alpha (\Delta R(v_1', v_2')_{\alpha 5}) R(v_1, v_2)_{\alpha 5}}{\Sigma R(v_1'', v_2'')_\alpha R(v_1''', v_2''')_\alpha R(v_1', v_2')_\alpha R(v_1, v_2)_\alpha},$$

$$(37\text{c})\qquad r' = i\,\frac{\Sigma R(v_1'', v_2'')_\alpha R(v_1''', v_2''')_\alpha (\Delta R(v_1', v_2')_{\beta\gamma}) R(v_1, v_2)_{\beta\gamma}}{\Sigma R(v_1'', v_2'')_\alpha R(v_1''', v_2''')_\alpha R(v_1', v_2')_\alpha R(v_1, v_2)_\alpha}.$$

Pour la suite il est essentiel que les expressions précédentes puissent s'écrire un peu autrement. Comme il est facile de le voir, on a pour un indice simple $Q(s')^0_\mu = 0$ et par suite

$$\frac{\partial R(v'_1, v'_2)_\mu}{\partial v'_1} = mR(v'_1, v'_2)_\mu.$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial v'_1}(\Sigma R(v''_1, v''_2)_\alpha R(v'''_1, v'''_2)_\alpha R(v'_1, v'_2)_\alpha R(v_1, v_2)_\alpha)$$

$$= m\{\Sigma R(v''_1, v''_2)_\alpha R(v'''_1, v'''_2)_\alpha R(v'_1, v'_2)_\alpha R(v_1, v_2)_\alpha\}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$p' = l\gamma'_1 - i\frac{\partial\gamma'_1}{\partial v'_1}, \tag{39 a}$$

$$q' = l\gamma'_2 - i\frac{\partial\gamma'_2}{\partial v'_1}, \tag{39 b}$$

$$r' = l\gamma'_3 - i\frac{\partial\gamma'_3}{\partial v'_1}. \tag{39 c}$$

Si on pose pour abréger

$$\begin{aligned}\nabla F(v'_1, v'_2) = \Delta\Delta F(v'_1, v'_2) - l\Delta F(v'_1, v'_2)\\ + \left(n - m^2 - l^2 + \frac{e_4 + e_5}{2}\right)F(v'_1, v'_2),\end{aligned} \tag{40}$$

les grandeurs u et v deviennent

$$u = -2\frac{\Sigma R(v''_1, v''_2)_\alpha R(v'''_1, v'''_2)_\alpha \nabla R(v'_1, v'_2)_{\alpha 4} R(v_1, v_2)_{\alpha 4}}{\Sigma R(v''_1, v''_2)_\alpha R(v'''_1, v'''_2)_\alpha R(v'_1, v'_2)_\alpha R(v_1, v_2)_\alpha}, \tag{41 a}$$

$$v = -2\frac{\Sigma R(v''_1, v''_2)_\alpha R(v'''_1, v'''_2)_\alpha \nabla R(v'_1, v'_2)_{\alpha 5} R(v_1, v_2)_{\alpha 5}}{\Sigma R(v''_1, v''_2)_\alpha R(v'''_1, v'''_2)_\alpha R(v'_1, v'_2)_\alpha R(v_1, v_2)_\alpha}. \tag{41 b}$$

§ 5. *Introduction des fonctions thêta.*

Les fonctions employées dans le chapitre précédent $R(v_1, v_2)$ peuvent se représenter facilement au moyen des fonctions θ. Pour introduire

ces fonctions, nous avons d'abord à rechercher la position relative des zéros de S et des limites d'intégration.

Les deux zéros e_4 et e_5 sont réels et $e_5 > e_4$. Des trois zéros e_1, e_2, e_3 qui sont les racines de l'équation

$$s(s - e_4)(s - e_5) + s - 2l^2 = 0$$

il y en a un ou trois réels. Dans le 1^er cas au moyen du terme indépendant de s on reconnaît le signe de la racine réelle; dans l'autre cas la plus grande racine est certainement positive, tandis que les deux autres sont en même temps positives ou négatives. Nous pouvons donc distinguer trois cas.

I) Toutes les racines réelles

$$1)\quad e_1 > e_2 > e_3 > 0,$$

$$2)\quad e_1 > 0 > e_2 > e_3.$$

II) Une racine réelle, les 2 autres imaginaires

$$3)\quad e_1 > 0;\ e_2 \text{ et } e_3 \text{ conjugués.}$$

De l'équation

$$\sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)} = \sqrt{2e_\alpha}\frac{x_1 x_2 - e_\alpha + 3l_1}{x_1 - x_2} + \frac{2l}{\sqrt{2e_\alpha}}\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}$$

qui a lieu pour $\alpha = 1, 2, 3$, on peut très facilement déduire la position des grandeurs s_1, s_2 par rapport aux zéros. D'après les équations qui définissent s_1 et s_2, ces deux grandeurs sont réelles, et parce que $\sqrt{R(x_1)}$ et $\sqrt{R(x_2)}$ doivent être conjuguées, on a $s_1 > s_2$. Comme x_1 et x_2 sont aussi des grandeurs conjuguées, le second membre de l'équation écrite plus haut est imaginaire si e_α est positif, et réel si e_α est négatif. Ainsi les racines positives sont toujours situées entre les deux valeurs s_1 et s_2, tandis que les racines négatives occupent la même position par rapport à s_1 et s_2. On a donc

dans le premier cas $s_1 > e_1 > e_2 > e_3 > s_2$,

dans le second cas $s_1 > e_1 > s_2 > e_2 > e_3$,

dans le troisième cas $s_1 > e_1 > s_2$.

Des équations précédentes (5 a et 5 b)

$$\sqrt{\xi_1}\frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} + \sqrt{\xi_2}\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} = \sqrt{(t_1 + k)(t_2 - k)} = \sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)},$$

$$\sqrt{\xi_1}\frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} - \sqrt{\xi_2}\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} = \sqrt{(t_1 - k)(t_2 + k)} = \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)}$$

on déduit que $\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)}$ est purement imaginaire et $\sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)}$ réel. Comme $(s_1 - e_4) - (s_2 - e_5)$ est certainement positif, parce que $s_1 > s_2$, $e_5 > e_4$, il résulte de la première condition que l'on a

$$s_1 > e_4\ ,\ s_2 < e_5$$

tandis que de la seconde condition il résulte que ou bien

$$s_1 > e_5\ ,\ s_2 > e_4$$

ou

$$s_1 < e_5\ ,\ s_2 < e_4.$$

On a donc ou bien

$$s_1 > e_5 > s_2 > e_4$$

ou

$$e_5 > s_1 > e_4 > s_2.$$

Mais on avait

$$dt = dv_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{s_1 ds_1}{S_1} + \frac{s_2 ds_2}{S_2}\right),$$

$$0 = dv_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{ds_1}{S_1} + \frac{ds_2}{S_2}\right).$$

Donc S_1 et S_2 sont de pures imaginaires de manière que toujours un nombre impair de zéros doit être supérieur aux arguments. D'après cela nous obtenons dans les trois cas spécifiés plus haut

$$\text{I.}\qquad e_5 > s_1 > e_1 > e_2 > e_3 > s_2,$$
$$s_1 > e_4 > s_2,$$
$$\text{II.}\qquad e_5 > s_1 > e_1 > s_2 > e_2 > e_3,$$
$$s_1 > e_4 > s_2,$$

$$\text{III.} \qquad e_5 > s_1 > e_1 > s_2,$$
$$s_1 > e_4 > s_2.$$ [1]

Nous appelons maintenant les zéros a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 et quand ils sont tous réels, nous choisissons les indices de manière qu'on ait

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Dans le cas où deux zéros sont imaginaires conjugués, on désignera par a_1 celui dont la partie imaginaire est positive et par a_2 celui dont la partie imaginaire est négative, et on aura

$$a_0 < a_3 < a_4.$$

Comme limites inférieures nous prenons les zéros a_1 et a_3, alors les intégrales

$$v_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left\{\int_{a_3}^{} \frac{s_1 ds_1}{S_1} + \int_{a_1}^{} \frac{s_2 ds_2}{S_2}\right\},$$

$$v_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left\{\int_{a_3}^{} \frac{ds_1}{S_1} + \int_{a_1}^{} \frac{ds_2}{S_2}\right\}$$

se distinguent de grandeurs réelles au plus par un système de demi-périodes simultanées. Au contraire v_1', v_2' sont de pures imaginaires sauf des demi-périodes simultanées. Les limites supérieures sont ici $2l^2$ et ∞. Mais

$$(2l^2 - e_1)(2l^2 - e_2)(2l^2 - e_3)(2l^2 - e_4)(2l^2 - e_5) = 2l^2(2l^2 - e_4)^2(2l^2 - e_5)^2$$

est positif d'où résulte immédiatement l'exactitude de notre assertion.

Nous introduisons maintenant au lieu de la grandeur S la grandeur

$$\mathfrak{S} = \frac{S\sqrt{2}}{i} = \sqrt{-2(s-a_0)(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)(s-a_4)}$$

---

[1] De ces trois cas le second doit être rejeté, puisque on a $e_5 + e_4 = e_1 + e_2 + e_3$ et $e_3 < 0$. Car il s'ensuit $e_5 + e_4 < e_1 + e_2$, tandis que les conditions du deuxième cas exigeraient $e_5 + e_4 > e_1 + e_2$.

et nous posons $F(s)_1 = s$, $F(s)_2 = 1$. Ainsi que nous avons fixé la désignation des zéros, les demi-périodes

$$K_{a1} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{F(s)_a}{\mathfrak{S}} ds \quad \text{et} \quad K_{a2} = \int_{a_3}^{a_4} \frac{F(s)_a}{\mathfrak{S}} ds$$

sont toujours réelles, si nous choisissons convenablement les chemins d'intégration. Dans le cas où tous les zéros sont réels nous prenons comme chemin d'intégration pour les deux intégrales la droite qui joint les deux limites et alors nous donnons à $\mathfrak{S}$ de a_1 à a_2 des valeurs positives et de a_3 à a_4 des valeurs négatives.

Mais si a_1 et a_2 sont des valeurs imaginaires conjuguées il en sera pour l'intégrale K_{a2} comme précédemment, mais au contraire nous prendrons l'intégrale K_{a1} le long d'un arc de cercle joignant a_1 et a_2 et coupant la droite $a_0 a_4$ en un point b situé entre a_0 et a_3. Le signe de la grandeur $\mathfrak{S}$ qui doit varier d'une manière continue sur le chemin d'intégration, sera choisi de manière que $\mathfrak{S}$ soit en b une imaginaire négative. Comme $\mathfrak{S}$ est évidemment en b purement imaginaire, $\mathfrak{S}$ ne prend pas des valeurs conjuguées en deux points conjugués du chemin, mais les parties imaginaires coïncident tandis que les parties réelles sont de signes contraires. De là il résulte immédiatement que les deux parties de l'intégrale qui s'étendent de a_1 à b et de b à a_2 sont conjuguées de manière que l'intégrale entière

$$K_{a1} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{F(s)_a ds}{\mathfrak{S}}$$

est réelle.

Nous définissons de plus deux nouvelles demi-périodes par les équations

$$i\overline{K}_{a1} = \int_{a_0}^{a_1} \frac{F(s)_a ds}{\mathfrak{S}}, \qquad i\overline{K}_{a2} = \int_{a_2}^{a_3} \frac{F(s)_a ds}{\mathfrak{S}}.$$

Dans le cas où toutes les racines sont réelles il faut encore prendre des chemins d'intégration rectilignes et $\mathfrak{S}$ doit être imaginaire négatif entre a_0 et a_1, imaginaire positif entre a_2 et a_3, ces intégrales deviennent alors

purement imaginaires. Si a_1 et a_2 sont imaginaires, le chemin pour la première intégrale doit se composer du segment rectiligne de a_0 à b et de l'arc de cercle ba_1, et le chemin de la seconde intégrale doit se composer de l'arc a_2b et du segment de droite ba_3. Ici encore la grandeur $\mathfrak{S}$ doit varier d'une manière continue, le signe devant être choisi de sorte que $\mathfrak{S}$ soit en b imaginaire négatif dans la première intégrale et imaginaire positif dans la seconde.

Alors les intégrales $i\overline{K}_{a1}$ et $i\overline{K}_{a2}$ ne sont plus imaginaires pures, mais prennent une partie réelle qui est égale pour la première à $-\frac{1}{2}K_{a1}$ et pour la seconde à $+\frac{1}{2}K_{a1}$.

Nous posons de plus

$$iK'_{a1} = i\overline{K}_{a1} \quad \text{et} \quad iK'_{a2} = i\overline{K}_{a1} + i\overline{K}_{a2}$$

de manière que toujours iK'_{a2} soit purement imaginaire. Nous appelons périodes primitives les valeurs ainsi définies $2K_{a1}$, $2K_{a2}$, $2iK'_{a1}$, $2iK'_{a2}$. En place de v_1 et v_2 nous introduisons maintenant les grandeurs u_1 et u_2 qui satisfont aux équations

$$v_1 = 2K_{11}u_1 + 2K_{12}u_2,$$
$$v_2 = 2K_{21}u_1 + 2K_{22}u_2.$$

Leur résolution nous donne

$$u_1 = g_{11}v_1 + g_{21}v_2,$$
$$u_2 = g_{12}v_1 + g_{22}v_2,$$

alors u_1 et u_2 ont immédiatement les périodes simultanées

$$1, 0 \quad \text{et} \quad 0, 1;$$

aux autres systèmes de périodes primitives correspondent alors les périodes

$$\tau_{\alpha\beta} = 2i(g_{1\alpha}K'_{1\beta} + g_{2\alpha}K'_{2\beta}); \qquad \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}.$$

Si nous posons

$$G(s)_\alpha = g_{1\alpha}F(s)_1 + g_{2\alpha}F(s)_2,$$

les intégrales

$$\int_{\infty}^{a_\lambda} \frac{G(s)_a}{\mathfrak{S}} ds = \omega_a^\lambda$$

sont des demi-périodes de u_a de la forme

$$\frac{1}{2} m_a^\lambda + \frac{1}{2}(n_1^\lambda \tau_{a1} + n_2^\lambda \tau_{a2})$$

et on a

		m_1^λ	m_2^λ	n_1^λ	n_2^λ
pour	$\lambda = 0$	-1	-1	0	0
	$\lambda = 1$	-1	-1	1	0
	$\lambda = 2$	0	-1	1	0
	$\lambda = 3$	0	-1	0	1
	$\lambda = 4$	0	0	0	1.

Tout autre système de demi-périodes simultanées de u_1 et u_2 peuvent se former au moyen d'une période entière et d'une ou deux des demi-périodes introduites plus haut.

La fonction $\vartheta(u_1, u_2)$ est alors définie par l'équation

$$\vartheta(u_1, u_2) = \sum_{n_1, n_2} e^{[n_1(2u_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{12}) + n_2(2u_2 + n_1\tau_{21} + n_2\tau_{22})]\pi i}.$$

De plus on pose

$$\vartheta(u_1, u_2 \mid n_1, n_2) = \vartheta(u_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{12}, u_2 + n_1\tau_{21} + n_2\tau_{22}) e^{-\sum_a n_a(2u_a + \tau_a)\pi i},$$

où l'on a posé pour abréger

$$\tau_a = n_1 \tau_{a1} + n_2 \tau_{a2}$$

et cette définition ne s'applique pas seulement pour les nombres n entiers. A l'aide des nombres m_a^λ, n_a^λ nous définissons maintenant les fonctions théta à indice simple

$$\vartheta(u_1, u_2)_\lambda = \vartheta\left(u_1 + \frac{1}{2} m_1^\lambda, u_2 + \frac{1}{2} m_2^\lambda \;\middle|\; \frac{1}{2} n_1^\lambda, \frac{1}{2} n_2^\lambda\right).$$

Si λ et μ sont deux indices différents, on doit avoir

$$m_a^{\lambda\mu} \equiv m_a^\lambda + m_a^\mu \quad \text{et} \quad n_a^{\lambda\mu} \equiv n_a^\lambda + n_a^\mu \pmod{2},$$

$$-1 \leqq m_a^{\lambda\mu} \leqq 0, \qquad 1 \geqq n_a^{\lambda\mu} \geqq 0$$

et

$$\vartheta(u_1, u_2)_{\lambda\mu} = \vartheta\left(u_1 + \frac{1}{2} m_1^{\lambda\mu}, u_2 + \frac{1}{2} m_2^{\lambda\mu} \,\middle|\, \frac{1}{2} n_1^{\lambda\mu}, \frac{1}{2} n_2^{\lambda\mu}\right).$$

De la même manière nous définissons les fonctions théta dont l'indice est formé de plusieurs indices simples. Si un indice simple devient double, il disparaît. S'il y a plus de deux indices simples on peut réduire l'indice parce que l'on a

$$\sum_{\lambda=0,1,2,3,4} m_a^\lambda \equiv 0 \quad \text{et} \quad \Sigma n_a^\lambda \equiv 0 \pmod{2}.$$

Dès lors que λ soit un indice simple ou composé et que

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(m_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{12}),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}(m_2 + n_1\tau_{21} + n_2\tau_{22}),$$

soit une demi-période quelconque, qui après augmentation d'un certain nombre de périodes entières puissent se ramener à la demi-période appartenant à l'indice μ. Alors il vient

$$\vartheta(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2)_\lambda$$

$$= \vartheta(u_1, u_2)_{\lambda\mu} e^{-\frac{\pi i}{2}\Sigma n_a\left(2u_a + \omega_a + \frac{1}{2}m_a\right)} e^{\frac{\pi i}{2}\Sigma\left[-n_a m_a^\lambda + n_a^{\lambda\mu}\left(m_a^\lambda + m_a - m_a^{\lambda\mu}\right)\right]}.$$

Si dans le ω_1 et ω_2, m_a et n_a sont des nombres pairs, on obtient une autre égalité

$$\vartheta(u_1 + m_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{12}, u_2 + m_2 + n_1\tau_{21} + n_2\tau_{22})_\lambda$$

$$= \vartheta(u_1, u_2)_\lambda e^{-\pi i \Sigma n_a(2u_a + + n_1\tau_{a1} + n_2\tau_{a2})} e^{\pi i(\Sigma n_a^\lambda m_a - m_a^\lambda n_a)}.$$

Si λ et μ sont deux indices simples alors $\Sigma n_a^\lambda m_a^\mu$ est congruent à 0 ou 1 suivant que λ est plus petit ou plus grand que μ. Si $\lambda = \mu$ alors la

dite expression est paire ou impaire suivant que l'indice lui-même est pair ou impair. De plus on a toujours pour deux indices simples différents

$$\sum (n_a^\lambda m_a^\mu - n_a^\mu m_a^\lambda) \equiv 1 \pmod 2.$$

Entre les fonctions théta et les limites supérieures des intégrales on a les relations suivantes où 2λ représente un indice simple pair

$$\frac{\vartheta(u_1, u_2)_{2\lambda}}{\vartheta(u_1, u_2)} = \frac{\sqrt{(-1)^\lambda (s_1 - a_{2\lambda})(s_2 - a_{2\lambda})}}{\sqrt[4]{R'(a_{2\lambda})}},$$

$$\frac{\vartheta(u_1, u_2)_{2\lambda-1}}{\vartheta(u_1, u_2)} = \frac{\sqrt{(-1)^{\lambda-1}(s_1 - a_{2\lambda-1})(s_2 - a_{2\lambda-1})}}{\sqrt[4]{-R'(a_{2\lambda-1})}},$$

$$\frac{\vartheta(u_1, u_2)\vartheta(u_1, u_2)_{2\lambda\mu}}{\vartheta(u_1, u_2)_\lambda \vartheta(u_1, u_2)_\mu} = \frac{1}{s_1 - s_2}\sqrt{\frac{\pm(a_\lambda - a_\mu)}{A_0}}\left(\frac{\mathfrak{S}_1}{(s_1 - a_\lambda)(s_1 - a_\mu)} - \frac{\mathfrak{S}_2}{(s_2 - a_\lambda)(s_2 - a_\mu)}\right).$$

$$(A_0 = -2)$$

(Dans la dernière formule on a le signe $+$ ou $-$ suivant que λ est inférieur ou supérieur à μ.)

Nous posons les grandeurs e_1, e_2, e_3 égales aux grandeurs $a_{x_1}, a_{x_2}, a_{x_3}$ et les grandeurs e_4, e_5 égales aux grandeurs a_λ, a_μ. Alors il vient

$$Q(s_1, s_2)_1 = \frac{\sqrt{(s_1 - e_1)(s_2 - e_1)}}{\sqrt[4]{R'(e_1)}} = \varepsilon_{x_1}(-1)^{\frac{\nu_{x_1}}{4}} \frac{\vartheta(u_1, u_2)_{x_1}}{\vartheta(u_1, u_2)}$$

formule où ν_{x_1} est un nombre entier dépendant de l'indice, qui est pair ou impair en même temps que l'indice; ε_{x_1} signifie $+1$ ou -1 suivant le choix de $\sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}$. Comme $\vartheta(u_1, u_2)$ a la propriété que nous imposions à $R(v_1, v_2)$, nous pouvons poser $R(v_1, v_2) = \vartheta(u_1, u_2)$. Alors nous obtenons pour le dénominateur commun

$$\sum_{x = x_1, x_2, x_3} (-1)^{\nu_x} \varepsilon_x \varepsilon'_x \varepsilon''_x \varepsilon'''_x \vartheta(u''_1, u''_2)_x \vartheta(u'''_1, u'''_2)_x \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x.$$

De plus on a

$$\frac{Q(s_1, s_2)_{14}}{\sqrt{e_1 - e_4}} \frac{\sqrt{2}}{i} = \frac{Q_1 Q_4}{\sqrt{\frac{\pm(a_{x_1} - a_\lambda)}{A_0}}} \frac{\vartheta(u_1, u_2)\vartheta(u_1, u_2)_{x_1\lambda}}{\vartheta(u_1, u_2)_\lambda \vartheta(u_1, u_2)_{x_1}}.$$

Et comme $e_1 - e_4 = a_{\varkappa_1} - a_\lambda$, $\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = A_0$, nous obtenons

$$R(v_1, v_2)_{14} R(v_1', v_2')_{14} = \pm \varepsilon_{\varkappa_1} \varepsilon_{\varkappa_1}' \varepsilon_\lambda \varepsilon_\lambda' (-1)^{\frac{\nu_{\varkappa_1}+\nu_\lambda}{2}} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_1\lambda} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa_1\lambda}.$$

Il faut prendre ici le signe $+$ si l'indice $\varkappa_1 < \lambda$, ou autrement le signe $-$. Dans le premier cas $\Sigma n^\lambda m^\varkappa \equiv 1$ et dans le second $\equiv 0 \mod 2$. Nous pouvons donc toujours au lieu de $\pm$ écrire aussi

$$-(-1)^{\Sigma n^\lambda m^{\varkappa_1}}.$$

Nous obtenons d'une manière analogue

$$R(v_1, v_2)_{23} R(v_1', v_2')_{23}$$

$$= -(-1)^{\Sigma n^{\varkappa_3} m^{\varkappa_2}} \varepsilon_{\varkappa_2} \varepsilon_{\varkappa_2}' \varepsilon_{\varkappa_3} \varepsilon_{\varkappa_3}' (-1)^{\frac{\nu_{\varkappa_2}}{2}+\frac{\nu_{\varkappa_3}}{2}} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_1\lambda\mu} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa_1\lambda\mu}.$$

Comme évidemment dans les fractions n'entrent que les rapports des grandeurs $\vartheta(u_1'', u_2'')_\varkappa \vartheta(u_1''', u_2''')_\varkappa$ nous pouvons les multiplier par un même facteur quelconque sans altérer l'exactitude des formules. Mais les grandeurs u_a'', u_a''' par un choix convenable du chemin d'intégration sont évidemment les demi-périodes $\omega_a^{13\lambda}$, $\omega_a^{13\mu}$ et par suite en place de la grandeur

$$(-1)^{\nu_\varkappa} \varepsilon_\varkappa \varepsilon_\varkappa' \varepsilon_\varkappa'' \varepsilon_\varkappa''' \vartheta(u_1'', u_2'')_\varkappa \vartheta(u_1''', u_2''')_\varkappa$$

on peut poser l'expression

$$(-1)^{\mu_\varkappa} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^\varkappa} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu}.$$

Les signes des termes des fractions à déterminer dépendent du chemin suivant lequel on détermine les grandeurs u_1, u_2, u_1', u_2' et peuvent être changés d'une manière certaine parce que nous pouvons aussi changer ces chemins le cas échéant. Nous voulons déterminer les grandeurs u_1, u_2 de manière que si s_2 est situé entre deux zéros a_1 et a_2, u_1 et u_2 sont réels, mais si s_2 est situé entre a_0 et $-\infty$, u_a doit se composer d'une partie réelle et de la demi-période

$$-\varepsilon\tau_{a1} = -\int_{a_0}^{a_1} \frac{G(s)_a\, ds}{\mathfrak{S}}.$$

En augmentant u'_1 et u'_2 d'un nombre convenable de périodes, nous pouvons faire que tous les nombres μ_x soient congrus les uns aux autres suivant le module 2, et de plus, s'il le faut changer le signe de γ_1 et de γ_2. Nous pouvons toujours supposer que deux des quantités μ_x soient égales l'une à l'autre; si la 3°, par exemple μ_{x_1}, est différente nous augmentons u'_a de la période $2\omega_a^{x_2 x_3}$. On change ainsi le signe des termes dont l'indice est différent du troisième, pendant que les termes de l'indice x_1 conservent leur signe. Maintenant les nombres μ_x sont congrus les uns aux autres, et égaux à zéro, parce qu'ici cela ne dépend que des fractions. Pour changer le signe des deux grandeurs γ'_1, γ'_2, ou celui de γ'_1 seul ou celui de γ'_2 seul nous avons à ajouter aux grandeurs u'_a les périodes $2\omega_a^{\lambda\mu}$, $2\omega_a^{\mu}$ ou $2\omega_a^{\lambda}$. Le signe de γ'_3 est déterminé par celui des deux grandeurs γ'_1, γ'_2.

D'après ce qui a été dit, le terme du dénominateur relatif à l'indice x devient

$$i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x.$$

Les termes correspondants des numérateurs deviennent

$$-\varepsilon_\lambda \varepsilon'_\lambda (-1)^{\frac{\nu_\lambda}{2} + \Sigma n^\lambda m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda},$$

$$-\varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu (-1)^{\frac{\nu_\mu}{2} + \Sigma n^\mu m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\mu},$$

$$-\varepsilon_{x_1} \varepsilon_{x_2} \varepsilon_{x_3} \varepsilon'_{x_1} \varepsilon'_{x_2} \varepsilon'_{x_3} (-1)^{\sum_x \frac{\nu_x}{2} + \Sigma n^{x\beta} m^{x\gamma}} i i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} (-1)^{\nu_x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda\mu}.$$

On peut encore transformer un peu les coefficients de ces expressions. On a en effet

$$\begin{aligned}(-1)^{\Sigma n^{x\beta} m^{x\gamma} + \nu_x} &= (-1)^{\Sigma n^{x\beta} m^{x\gamma} + \Sigma n^x m^x} \\ &= (-1)^{\Sigma n^{x\beta} m^{x\gamma} + \Sigma n^{\lambda\mu} m^x + \Sigma n^{x\beta x\gamma} m^x} \\ &= (-1)^{\Sigma(n^{x_2} m^{x_3} + n^{x_3} m^{x_1} + n^{x_1} m^{x_2})} (-1)^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} = \pm (-1)^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x}.\end{aligned}$$

De plus on a

$$\nu_\lambda + \nu_\mu + \sum_x \nu_x \equiv 0 \pmod 2,$$

et par conséquent

$$(-1)^{\sum_x \frac{\nu_x}{2}} = \pm (-1)^{\frac{\nu_\lambda + \nu_\mu}{2}}.$$

Si nous désignons maintenant par $|n|$ une quantité qui a la valeur 0 ou ± 1 suivant que l'indice n est pair ou impair, alors d'après les développements précédents on peut poser

$$-\varepsilon_\lambda \varepsilon'_\lambda (-1)^{\frac{\nu_\lambda}{2}} = i^{|\lambda|},$$

$$-\varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu (-1)^{\frac{\nu_\mu}{2}} = i^{|\mu|}$$

Mais comme on a

$$|\lambda| + |\mu| + |\lambda\mu| \equiv 1 \pmod 2$$

on peut poser pour le coefficient de la troisième expression

$$\pm\, i^{|\lambda\mu| + \Sigma n^{\lambda\mu} m^x} (-1)^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x}.$$

Et il faut prendre simultanément pour tous les termes le signe supérieur ou inférieur. Si nous définissons donc $|\lambda\mu|$ d'une manière convenable on peut prendre le signe $+$.

D'après cela nous obtenons les expressions suivantes pour les grandeurs $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, p', q', r', u, v$

$$\gamma'_1 = i^{|\lambda|} \frac{\Sigma'_x (-1)^{\Sigma n^\lambda m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda}}{\Sigma'_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$\gamma'_2 = i^{|\mu|} \frac{\Sigma'_x (-1)^{\Sigma n^\mu m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\mu}}{\Sigma'_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$\gamma'_3 = i^{|\lambda\mu|} \frac{\Sigma'_x (-1)^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda\mu}}{\Sigma'_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$p' = i^{|\lambda|} \frac{\Sigma'_x (-1)^{\Sigma n^\lambda m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \Delta\vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda}}{\Sigma'_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$q' = i^{|\mu|} \frac{\Sigma'_x (-1)^{\Sigma n^\mu m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \Delta\vartheta(u'_1, u'_2)_{x\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\mu}}{\Sigma'_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$r' = i^{|\lambda\mu|} \frac{\Sigma'_x (-1)^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \Delta\vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda\mu}}{\Sigma'_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$u = -2i^{|\lambda|}\frac{\Sigma'_x(-1)^{\Sigma n^\lambda m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x}\vartheta_{13x\lambda}\vartheta_{13x\mu}\nabla\vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda}\vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda}}{\Sigma_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x}\vartheta_{13x\lambda}\vartheta_{13x\mu}\vartheta(u'_1, u'_2)_x\vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$v = -2i^{|\mu|}\frac{\Sigma'_x(-1)^{\Sigma n^\mu m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x}\vartheta_{13x\lambda}\vartheta_{13x\mu}\nabla\vartheta(u'_1, u'_2)_{x\mu}\vartheta(u_1, u_2)_{x\mu}}{\Sigma_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x}\vartheta_{13x\lambda}\vartheta_{13x\mu}\vartheta(u'_1, u'_2)_x\vartheta(u_1, u_2)_x}.$$

Ainsi d'après cela les cosinus directeurs avec la verticale de même que que les vitesses de rotations pour notre système de coordonnées sont déterminés; on trouve les grandeurs correspondantes pour le système de coordonnées fixe dans le corps au moyen des formules

$$\gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{\gamma'_1 + i\gamma'_2}{u + iv}, \qquad p + iq = \frac{p' + iq'}{u + iv},$$

$$\gamma_1 - i\gamma_2 = \frac{\gamma'_1 - i\gamma'_2}{u - vi}, \qquad p - iq = \frac{p' - iq'}{u - iv},$$

$$\gamma_3 = \gamma'_3, \qquad r = 2r'.$$

§ 6. *Les cosinus directeurs pour les axes horizontaux et les composantes de la vitesse de rotation par rapport aux axes fixes dans l'espace.*

Si une ligne quelconque forme avec les axes fixes dans le corps les cosinus directeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, alors on trouve les angles de la même ligne avec les axes du nouveau système de coordonnées au moyen des équations

$$\alpha'_1 + i\alpha'_2 = (\alpha_1 + i\alpha_2)(u + iv), \qquad \alpha'_1 - i\alpha'_2 = (\alpha_1 - i\alpha_2)(u - iv), \qquad \alpha'_3 = \alpha_3.$$

Inversement si les derniers sont données, on trouve aussi facilement $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Si maintenant une direction dont les cosinus avec les axes du 3^e^ système sont $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ est perpendiculaire à la direction $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$, on doit avoir

$$\gamma'_1\beta'_1 + \gamma'_2\beta'_2 + \gamma'_3\beta'_3 = 0.$$

Une troisième direction perpendiculaire aux deux premières a alors pour cosinus directeurs

$$\alpha_1' = \beta_2'\gamma_3' - \beta_3'\gamma_2',$$
$$\alpha_2' = \beta_3'\gamma_1' - \beta_1'\gamma_3',$$
$$\alpha_3' = \beta_1'\gamma_2' - \beta_2'\gamma_1'.$$

Or, si l'on a un système quelconque de grandeurs $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ qui satisfait à ces quatre conditions, on trouve les cosinus directeurs de deux lignes perpendiculaires entre elles et sur la direction γ au moyen des égalités

$$\begin{aligned} \alpha_\varkappa' + i\beta_\varkappa' &= K(a_\varkappa + ib_\varkappa), \\ \alpha_\varkappa' - i\beta_\varkappa' &= K'(a_\varkappa - ib_\varkappa), \end{aligned} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

où K et K' sont deux grandeurs à déterminer de sorte que l'on ait

$$KK'\Sigma(a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2) = \Sigma(\alpha_\varkappa'^2 + \beta_\varkappa'^2) = 2.$$

On peut donc poser

$$\alpha_\varkappa' \pm i\beta_\varkappa' = \frac{\sqrt{2}\,(a_\varkappa \pm ib_\varkappa)}{\sqrt{\Sigma a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2}}\,e^{\pm iu_3}.$$

La grandeur u_3 se détermine alors au moyen de la condition que la vitesse de rotation du corps relative à l'axe vertical, c'est à dire l'expression

$$\alpha_1'\frac{d\beta_1'}{dt} + \alpha_2'\frac{d\beta_2'}{dt} + \alpha_3'\frac{d\beta_3'}{dt} = \frac{i}{2}\sum(\alpha_\varkappa' + i\beta_\varkappa')\frac{d(\alpha_\varkappa' - i\beta_\varkappa')}{dt}.$$

ait la valeur déjà connue

$$p'\gamma_1' + q'\gamma_2' + r'\gamma_3'.$$

Il importe encore qu'on puisse supprimer les facteurs communs des grandeurs $(a_\varkappa + ib_\varkappa)$ en les rejetant sur K. La même chose se fera pour $(a_\varkappa - ib_\varkappa)$.

Les quantités u_1 et u_2 étaient seulement dépendantes de t, en tant qu'elles sont des fonctions linéaires de v_1 qui est lui-même égal à t. On a donc

$$\frac{d\gamma_\varkappa}{dt} = \frac{\partial\gamma_\varkappa}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\gamma_\varkappa}{\partial u_2}g_{12}. \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

Les composantes de la vitesse de rotation étaient

$$p' = l\gamma_1 - i\frac{\partial\gamma_1}{\partial v_1'} = l\gamma_1 - i\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_1}{\partial u_2'}g_{12}\right),$$

$$q' = l\gamma_2 - i\frac{\partial\gamma_2}{\partial v_1'} = l\gamma_2 - i\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial u_2'}g_{12}\right),$$

$$r' = l\gamma_3 - i\frac{\partial\gamma_3}{\partial v_1'} = l\gamma_3 - i\left(\frac{\partial\gamma_3}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_3}{\partial u_2'}g_{12}\right).$$

Si on introduit ces expressions dans les équations différentielles pour $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$ (24a, 24b, 24c), on arrive aux relations suivantes

$$\left(\frac{\partial\gamma_1'}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\gamma_1'}{\partial u_2}g_{12}\right) = i\left(\frac{\partial\gamma_2'}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_2'}{\partial u_2'}g_{12}\right)\gamma_3' - i\left(\frac{\partial\gamma_3'}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_3'}{\partial u_2'}g_{12}\right)\gamma_2',$$

$$\left(\frac{\partial\gamma_2'}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\gamma_2'}{\partial u_2}g_{12}\right) = i\left(\frac{\partial\gamma_3'}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_3'}{\partial u_2'}g_{12}\right)\gamma_1' - i\left(\frac{\partial\gamma_1'}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_1'}{\partial u_2'}g_{12}\right)\gamma_3',$$

$$\left(\frac{\partial\gamma_3'}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\gamma_3'}{\partial u_2}g_{12}\right) = i\left(\frac{\partial\gamma_1'}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_1'}{\partial u_2'}g_{12}\right)\gamma_2' - i\left(\frac{\partial\gamma_2'}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_2'}{\partial u_2'}g_{12}\right)\gamma_1'.$$

Nous remarquons ici que ces équations ne sont établies que pour les systèmes spéciaux de valeurs de u_1, u_2, u_1', u_2' considérées ici, mais elles sont vraies pour des valeurs quelconques. Les quantités g_{11}, g_{12} peuvent aussi être remplacées par deux valeurs absolument arbitraires. Enfin les coefficients

$$C_\varkappa = i^{\Sigma\varkappa\lambda\mu m^\varkappa}\vartheta_{13\varkappa\lambda}\vartheta_{13\varkappa\mu}$$

peuvent être remplacés par d'autres grandeurs $C_\varkappa$ qui satisfont à la condition caractéristique

$$\sum_\varkappa(-1)^{|\varkappa|}C_\varkappa^2 = 0$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude pour les grandeurs ici considérées.

Mais comme ce qui a été démontré jusqu'ici suffit pour la continuation du calcul, nous réservons pour une autre occasion l'extension des formules en question.

Si maintenant dans l'intégrale qui représente le théorème des aires pour un plan horizontal

$$2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 = 2l$$

nous exprimons toutes les quantités au moyen des quantités correspondantes dans le nouveau système de coordonnées, nous obtenons

$$2(p'\gamma_1' + q'\gamma_2' + r'\gamma_3') = 2l$$

et, en remplaçant p', q', r' par leurs valeurs,

$$i\left(\frac{\partial\gamma_1'}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_1'}{\partial u_2'}g_{12}\right)\gamma_1' + i\left(\frac{\partial\gamma_2'}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_2'}{\partial u_2'}g_{12}\right)\gamma_2' + i\left(\frac{\partial\gamma_3'}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_3'}{\partial u_2'}g_{12}\right)\gamma_3' = 0.$$

Par conséquent les quantités

$$\frac{\partial\gamma_x'}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\gamma_x'}{\partial u_2}g_{12} \quad \text{et} \quad i\left(\frac{\partial\gamma_x'}{\partial u_1'}g_{11} + \frac{\partial\gamma_x'}{\partial u_2'}g_{12}\right)$$

remplissent les conditions supposées pour a_x, b_x.

Pour calculer ces expressions, nous déduisons quelques formules dans lesquelles x représente l'un quelconque des indices x_1, x_2, x_3; de plus soit $x_4 = \lambda\mu$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \mu$, $\lambda_3 = \lambda\mu$; enfin dans les formules qui suivent λ désigne l'un quelconque des indices λ_1, λ_2, λ_3. L'expression

$$\begin{aligned}(-1)^{\Sigma n^\lambda m^x}\vartheta(u')_{x\lambda}\vartheta(u')_x\Big\{&\vartheta(u)_x\left(\frac{\partial}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_2}g_{12}\right)\vartheta(u)_{x\lambda} \\ &- \vartheta(u)_{x\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_2}g_{12}\right)\vartheta(u)_x\Big\} \\ + (-1)^{|x|+|x_4\lambda|+\Sigma n^\lambda m^{x_4}+\Sigma n^{13}m^{13\lambda}}\vartheta(u')_{x_4\lambda}\vartheta(u')_{x_4}\Big\{&\vartheta(u)_{x_4\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_2}g_{12}\right)\vartheta(u)_{x_4} \\ &- \vartheta(u)_{x_4}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_2}g_{12}\right)\vartheta(u)_{x_4\lambda}\Big\}\end{aligned}$$ [1]

peut s'écrire comme fonction de u

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}\vartheta(u+u')_{13x\lambda}\vartheta(u-u')_{13x} + \mathfrak{A}'\vartheta(u+u')_{13x}\vartheta(u-u')_{13x\lambda} \\ &+ \mathfrak{B}\vartheta(u+u')_{13x_4\lambda}\vartheta(u-u')_{13x_4} + \mathfrak{B}'\vartheta(u+u')_{13x_4}\vartheta(u-u')_{13x_4\lambda}.\end{aligned}$$

---

[1] Pour plus de simplicité $\vartheta(u)_\mu$ est écrit en place de $\vartheta(u_1, u_2)_\mu$, ϑ_μ en place de $\vartheta(0, 0)_\mu$. Enfin $\Delta\vartheta(u)_\mu$ et $\bar{\Delta}\vartheta_\mu$ représentent les valeurs

$$\frac{\partial\vartheta(u)_\mu}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\vartheta(u)_\mu}{\partial u_2}g_{12} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial\vartheta(u)_\mu}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\vartheta(u)_\mu}{\partial u_2}g_{12}\right|_{u_1=u_2=0}.$$

Nous obtenons deux relations entre $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$, si nous observons que le premier membre est une fonction paire ou impaire suivant que $|x| + |x\lambda| \equiv 1$ ou $0 \pmod 2$, et une troisième relation en posant $u_a = \omega_a^{13\lambda}$, et une quatrième en posant $u_a = \omega_a^{13xx_4}$. Nous obtenons enfin

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(-1)^{\Sigma n^{13} m^{\lambda}}(-1)^{\Sigma n^{x} m^{13x}}\vartheta(u-u')_{13x}\overline{\Delta}\vartheta_{13x}(-1)^{\Sigma n^{x} m^{13\lambda x}+|x\lambda|}\vartheta(u+u')_{13x\lambda}\vartheta_{13x\lambda} \\
&+\frac{1}{2}(-1)^{\Sigma n^{13} m^{\lambda}}(-1)^{\Sigma n^{x} m^{13x}+|x|}\vartheta(u+u')_{13x}\overline{\Delta}\vartheta_{13x}(-1)^{\Sigma n^{x} m^{13\lambda x}}\vartheta(u-u')_{13x\lambda}\vartheta_{13x\lambda} \\
&+\frac{1}{2}(-1)^{|x|}\vartheta_{13x_4}\overline{\Delta}\vartheta_{13x_4\lambda}\{(-1)^{\Sigma n^{\lambda} m^{x_4}}\vartheta(u-u')_{13x_4}\vartheta(u+u')_{13x_4\lambda} \\
&\qquad\qquad + (-1)^{\Sigma n^{x_4\lambda} m^{\lambda}}\vartheta(u+u')_{13x_4}\vartheta(u-u')_{13x_4\lambda}\}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons de même en remplaçant d'abord u par $-u$, puis en posant $u_a = \omega_a^{13\lambda}$ et ensuite $u_a = \omega_a^{13x_1x_2\lambda}$

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\Sigma n^{\lambda} m^{x_1}}\vartheta(u')_{x_1\lambda}\vartheta(u')_{x_2}\{\vartheta(u)_{x_2}\overline{\Delta}\vartheta(u)_{x_1\lambda}-\vartheta(u)_{x_1\lambda}\overline{\Delta}\vartheta(u)_{x_2}\} \\
&(-1)^{\Sigma n^{\lambda} m^{x_2}}\vartheta(u')_{x_2\lambda}\vartheta(u')_{x_1}\{\vartheta(u)_{x_1}\overline{\Delta}\vartheta(u)_{x_2\lambda}-\vartheta(u)_{x_2\lambda}\overline{\Delta}\vartheta(u)_{x_1}\} = \\
&\frac{1}{2}(-1)^{\Sigma n^{13} m^{\lambda}}\{(-1)^{\Sigma n^{x_1} m^{13x_3}}\vartheta(u-u')_{13x_1}\overline{\Delta}\vartheta_{13x_1}(-1)^{\Sigma n^{x_2} m^{13\lambda x_2}+|x_2\lambda|}\vartheta(u+u')_{13x_2\lambda}\vartheta_{13x_2\lambda} \\
&\quad+(-1)^{\Sigma n^{x_1} m^{13x_1}+|x_1|}\vartheta(u+u')_{13x_1}\overline{\Delta}\vartheta_{13x_1}(-1)^{\Sigma n^{x_2} m^{13\lambda x_2}}\vartheta(u-u')_{13x_2\lambda}\vartheta_{13x_2\lambda} \\
&\quad+(-1)^{\Sigma n^{x_2} m^{13x_2}}\vartheta(u-u')_{13x_2}\overline{\Delta}\vartheta_{13x_2}(-1)^{\Sigma n^{x_1} m^{13\lambda x_1}+|x_1\lambda|}\vartheta(u+u')_{13x_1\lambda}\vartheta_{13x_1\lambda} \\
&\quad+(-1)^{\Sigma n^{x_2} m^{13x_2}+|x_2|}\vartheta(u+u')_{13x_2}\overline{\Delta}\vartheta_{13x_2}(-1)^{\Sigma n^{x_1} m^{13\lambda x_1}}\vartheta(u-u')_{13x_1\lambda}\vartheta_{13x_1\lambda}\}
\end{aligned}$$

Nous multiplions la première équation par C_x^2 et ensuite nous sommons en donnant à l'indice x les trois valeurs x_1, x_2, x_3. Nous multiplions la seconde par $C_{x_1}C_{x_2}$ et formons la somme des termes qui peuvent se dériver par permutation circulaire des nombres $1, 2, 3$. Comme $\Sigma(-1)^x C_x^2 = 0$, les termes d'indice x_4 disparaissent dans la première somme et nous obtenons par addition des deux sommes

$$\{\Sigma_x C_x \vartheta(u')_x \vartheta(u)_x\}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_2} g_{12}\right) \sum_x C_x (-1)^{\Sigma n^\lambda m^x} \vartheta(u')_{x\lambda} \vartheta(u)_{x\lambda}$$

$$-\left\{\sum_x C_x (-1)^{\Sigma n^\lambda m^x} \vartheta(u')_{x\lambda} \vartheta(u)_{x\lambda}\right\}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_2} g_{12}\right) \sum_x C_x \vartheta(u')_x \vartheta(u)_x$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^{\Sigma n^{13} m^\lambda}\left\{\sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x}} C_x \vartheta(u-u')_{13x} \overline{\Delta} \vartheta_{13x}\right\}$$

$$\left\{\sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x\lambda} + |x\lambda|} C_x \vartheta(u+u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}(-1)^{\Sigma n^{13} m^\lambda}\left\{\sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x} + |x|} C_x \vartheta(u+u')_{13x} \overline{\Delta} \vartheta_{13x}\right\}$$

$$\left\{\sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x\lambda}} C_x \vartheta(u-u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda}\right\}.$$

Si nous ajoutons au premier membre le facteur $i^{|\lambda|}$ et le dénominateur

$$N^2 = \{\Sigma C_x \vartheta(u)_x \vartheta(u')_x\}^2,$$

nous obtenons l'expression $\frac{\partial \gamma'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma'}{\partial u_2} g_{12}$, où γ' désigne celui des cosinus directeurs $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$ qui correspond à l'indice λ. De là nous déduisons $\frac{\partial \gamma'}{\partial u_1'} g_{11} + \frac{\partial \gamma'}{\partial u_2'} g_{12}$ en permutant u en u'. Mais si dans l'équation établi précédemment nous changeons u en u', la valeur du premier terme du second membre change de signe, tandis que la seconde partie reste invariable. Car l'indice $13x$ est impair, tandis que $13x\lambda$ est pair. Par suite nous obtenons

$$\left|\frac{\partial \gamma'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma'}{\partial u_2} g_{12} \pm i\left(i\left(\frac{\partial \gamma'}{\partial u_1'} g_{11} + \frac{\partial \gamma'}{\partial u_1'} g_{12}\right)\right)\right|$$

$$= \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma'}{\partial u_2} g_{12}\right) \mp \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial u_1'} g_{11} + \frac{\partial \gamma'}{\partial u_2'} g_{12}\right)$$

$$= (-1)^{\Sigma n^{13} m^\lambda} i^{|\lambda|} N^{-2}\left\{\sum_x (\pm 1)^{|x|} (-1)^{\Sigma n^x m^{13x}} C_x \vartheta(u \mp u')_{13x} \overline{\Delta} \vartheta_{13x}\right\}$$

$$\left\{\sum_x (\mp 1)^{|x\lambda|} (-1)^{\Sigma n^x m^{13x\lambda}} C_x \vartheta(u \pm u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda}\right\}.$$

Par suite nous pouvons poser

$$\alpha' \pm i\beta' = i^{|\lambda|}(-1)^{\Sigma n^{13} m^{\lambda}} K e^{\pm i u_3} \frac{\sum_{x} (\mp 1)^{|x\lambda|}(-1)^{\Sigma n^{x} m^{13x\lambda}} C_x \vartheta(u \pm u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda}}{\sum_{x} C_x \vartheta(u)_x \vartheta(u')_x},$$

où α' et β' sont celles des quantités $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ et $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ qui correspondent à γ'. Pour déterminer K, nous avons à former

$$\sum_{\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} (-1)^{|\lambda|} \Big\{ \sum_{x=x_1,x_2,x_3} (-1)^{|x\lambda|}(-1)^{\Sigma n^{x} m^{13x\lambda}} C_x \vartheta(u+u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda} \Big\}$$
$$\times \Big\{ \sum (-1)^{\Sigma n^{x} m^{13x\lambda}} C_x \vartheta(u-u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda} \Big\}.$$

Cette expression se sépare en quatre parties à savoir

$$\sum_{x=x_1,x_2,x_3} C_x^2 \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|+|x\lambda|} \vartheta(u+u')_{13x\lambda} \vartheta(u-u')_{13x\lambda} \vartheta^2_{13x\lambda},$$

$$\sum_{\lambda} C_{x_1} C_{x_2} (-1)^{\Sigma n^{x_1} m^{13x_1\lambda} + \Sigma n^{x_2} m^{13x_2\lambda}} \Big\{ (-1)^{|\lambda|+|x_1\lambda|} \vartheta(u+u')_{13x_1\lambda} \vartheta(u-u')_{13x_2\lambda} \vartheta_{13x_1\lambda} \vartheta_{13x_2\lambda}$$
$$+ (-1)^{|\lambda|+|x_2\lambda|} \vartheta(u+u')_{13x_2\lambda} \vartheta(u-u')_{13x_1\lambda} \vartheta_{13x_1\lambda} \vartheta_{13x_2\lambda} \Big\}$$

et deux autres parties qui se déduisent de la deuxième par permutation circulaire des indices x_1, x_2, x_3.

Si nous considérons d'abord la partie de la première expression qui est multipliée par C_x^2, nous reconnaissons qu'elle est aussi bien par rapport à u qu'à u' une fonction théta paire de caractéristique nulle. On peut donc la poser égale à

$$\sum A_{\bar{x},\bar{x}';x} \vartheta^2(u)_{\bar{x}} \vartheta^2(u')_{\bar{x}'},$$

où $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ prennent les valeurs x_1, x_2, x_3, x_4. Si nous déterminons les coefficients de la manière connue, nous obtenons

$$\sum_{\bar{x}=x_1,x_2,x_3,x_4} (-1)^{|13|+|13\bar{x}|+|x\bar{x}|} \vartheta^2(u)_{\bar{x}} \vartheta^2(u')_{\bar{x}}.$$

Nous multiplions par C_x^2 et faisons la somme suivant x, qui parcourt les valeurs x_1, x_2, x_3; alors il vient

$$\sum_{\bar{x}=x_1,x_2,x_3,x_4} \vartheta^2(u)_{\bar{x}} \vartheta^2(u')_{\bar{x}} \sum_{x=x_1,x_2,x_3} C_x^2 (-1)^{|13|+|13\bar{x}|+|x\bar{x}|}.$$

Si $\bar{x} = x_4$, alors $|x\bar{x}| \equiv |\bar{x}| + |x|$, $|13| + |13\bar{x}| \equiv 1$ et par suite le coefficient de ce terme devient

$$-(-1)^{|\bar{x}|}\sum_x C_x^2(-1)^{|x|} = 0.$$

Si au contraire $\bar{x}$ est un indice simple, on a

$$|13| + |13\bar{x}| \equiv 0\,, \quad |x\bar{x}| \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \equiv |x| + |\bar{x}| + 1$$

suivant que x est identique à $\bar{x}$ ou non. Si nous désignons maintenant les deux indices x différents de $\bar{x}$ par $\bar{x}'$ et $\bar{x}''$ nous obtenons

$$C_{\bar{x}}^2 - \{C_{\bar{x}'}^2(-1)^{|\bar{x}'|} + C_{\bar{x}''}^2(-1)^{|\bar{x}''|}\}(-1)^{|\bar{x}|} = 2C_{\bar{x}}^2.$$

Par suite la première partie se réduit à

$$2\sum_{x_1, x_2, x_3} C_x^2 \vartheta^2(u)_x \vartheta^2(u')_x.$$

La partie multipliée par $C_{x_1}C_{x_2}$ est une fonction théta relativement à u de caractéristique $x_1 x_2$ qui est paire ou impaire suivant que $|x_1| + |x_2|$ est pair ou impair. Si donc $\bar{\lambda}$ désigne l'un quelconque des indices λ_1, λ_2, λ_3, on peut la poser égale à

$$A\vartheta(u)_{x_1}\vartheta(u)_{x_2} + B\vartheta(u)_{x_1\bar{\lambda}}\vartheta(u)_{x_2\bar{\lambda}}.$$

Si nous posons maintenant $u = \omega_{13\bar{\lambda}}$, la partie multipliée par B disparaît, et nous obtenons

$$A\vartheta(\omega^{13\bar{\lambda}})_{x_1}\vartheta(\omega^{13\bar{\lambda}})_{x_2}.$$

Au contraire l'expression à transformer devient égale à

$$4\vartheta(\omega^{13\bar{\lambda}})_{x_1}\vartheta(\omega^{13\bar{\lambda}})_{x_2}\vartheta(u')_{x_1}\vartheta(u')_{x_2}.$$

Il vient donc $A = 4\vartheta(u')_{x_1}\vartheta(u')_{x_2}$; maintenant il est facile de voir qu'aussi pour une autre période $\omega^{12\bar{\lambda}}$ l'expression à transformer devient égale à la valeur de $A\vartheta(u)_{x_1}\vartheta(u)_{x_2}$, et que par suite pour cette valeur $B\vartheta(u)_{x_1\bar{\lambda}}\vartheta(u)_{x_2\bar{\lambda}}$ s'annule. Mais ce n'est possible que si B est nul. Par suite la seconde partie devient simplement

$$4C_{x_1}C_{x_2}\vartheta(u)_{x_1}\vartheta(u)_{x_2}\vartheta(u')_{x_1}\vartheta(u')_{x_2}.$$

Si nous permutons entre elles circulairement les grandeurs x_1, x_2, x_3, nous obtenons la troisième et la quatrième partie. En réunissant les quatre parties nous obtenons enfin

$$2\Big\{\sum_{x_1,x_2,x_3} C_x \vartheta(u)_x \vartheta(u')_x\Big\}^2 = 2N^2.$$

Par suite la grandeur K a ici exactement la valeur 1, de sorte qu'il vient

$$\alpha' \pm i\beta' = i^{|\lambda|}(-1)^{\Sigma n^{13} m^\lambda} \frac{\Sigma_x (\mp 1)^{|x\lambda|}(-1)^{\Sigma n^x m^{13x\lambda}} C_x \vartheta(u \pm u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda}}{\Sigma_x C_x \vartheta(u)_x \vartheta(u')_x} e^{\pm iu_3}.$$

Nous déduisons la fonction iu_3 de la composante de la vitesse de rotation suivant l'axe verticale

$$\bar{p}' = p'\gamma_1' + q'\gamma_2' + r'\gamma_3' = \frac{i}{2}\sum_{\nu=1,2,3}(\alpha_\nu' + i\beta_\nu')\frac{d(\alpha_\nu' - i\beta_\nu')}{dt}$$

$$= \frac{i}{2}\sum(\alpha_\nu' + i\beta_\nu')\left\{\frac{\partial(\alpha_\nu' - i\beta_\nu')}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial(\alpha_\nu' - i\beta_\nu')}{\partial u_2} g_{12} - i\frac{du_3}{dt}(\alpha_\nu' - i\beta_\nu')\right\}.$$

Or $N(\alpha_\nu' - i\beta_\nu')e^{+iu_3}$ est seulement fonction de $u_1 - u_1'$, $u_2 - u_2'$; par suite il vient

$$\frac{\partial N(\alpha_\nu' - i\beta_\nu')}{\partial u_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\alpha_\nu' - i\beta_\nu')N}{\partial u_\alpha} - \frac{\partial(\alpha_\nu' - i\beta_\nu')N}{\partial u_\alpha'}\right),$$

tandis que $N(\alpha_\nu' + i\beta_\nu')e^{-iu_3}$ ne dépend que de $u_1 + u_1'$, $u_2 + u_2'$, de sorte qu'on a

$$\frac{\partial e^{-iu_3}(\alpha_\nu' + i\beta_\nu')N}{\partial u_\alpha} - \frac{\partial e^{-iu_3}(\alpha_\nu' + i\beta_\nu')N}{\partial u_\alpha'} = 0$$

et en conséquence

$$\bar{r}' = \frac{du_3}{dt} + \frac{i}{4N^2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_1'}\right)g_{11} + \left(\frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial u_2'}\right)g_{12}\right)\left\{\Sigma(\alpha_\nu' + i\beta_\nu')(\alpha_\nu' - i\beta_\nu')N^2\right\}$$

$$- \frac{i}{2N}\frac{dN}{dt}\Sigma(\alpha_\nu' + i\beta_\nu')(\alpha_\nu' - i\beta_\nu').$$

Mais comme la somme qui se rencontre plusieurs fois a la valeur 2, il s'en déduit

$$\bar{r}' = \frac{du_3}{dt} - i\left(\frac{\partial \ln N}{\partial u_1'} g_{11} + \frac{\partial \ln N}{\partial u_2'} g_{12}\right)$$

$$= \frac{du_3}{dt} - im.$$

L'expression de gauche avait la valeur constante l, par suite il vient

$$u_3 = (l + im)(t - t_0)$$

où t_0 désigne une constante.

Les six cosinus directeurs des deux axes horizontaux par rapport au système de coordonnéés tournant dans le corps autour de l'axe du moment d'inertie distingué étant ainsi déterminés, on peut de la manière développée plus haut trouver les cosinus directeurs relatifs au système de coordonnées fixe dans le corps.

Maintenant il ne nous manque plus que les composantes de la vitesse de rotation suivant l'axe horizontal. Elles sont déterminées par les équations

$$\bar{p}' \pm i\bar{q}' = \Sigma p'_\nu(\alpha'_\nu \pm i\beta'_\nu) = \mp i \sum (\alpha'_\nu \pm i\beta'_\nu) \frac{d\gamma'_\nu}{dt}.$$

Mais on avait

$$\frac{d\gamma'_\nu}{dt} = \frac{1}{2}(\alpha'_\nu + i\beta'_\nu)\Big\{\sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x}} C_x \vartheta(u - u')_{13x} \overline{\Delta} \vartheta_{13x}\Big\} e^{-iu_3} N^{-1}$$

$$+ \frac{1}{2}(\alpha'_\nu - i\beta'_\nu)\Big\{\sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x} + |x|} C_x \vartheta(u + u')_{13x} \overline{\Delta} \vartheta_{13x}\Big\} e^{+iu_3} N^{-1}.$$

Par suite on a

$$\bar{p}' \pm i\bar{q}' = \mp i \Big\{\sum_x (\mp 1)^{|x| + \Sigma n^x m^{13x}} C_x \vartheta(u \pm u')_{13x} \overline{\Delta} \vartheta_{13x}\Big\} e^{\pm iu_3} N^{-1}$$

$$= \pm \Big\{\sum_x (\mp 1)^{|x| + \Sigma n^x m^{13x}} C_x \vartheta(u \pm u')_{13x} \Delta \vartheta_{13x}\Big\} N^{-1} e^{\pm iu_3}.$$

Le mouvement du corps se compose du mouvement du système des axes de coordonnées introduit et d'une rotation autour de l'axe des z de ce système dont la vitesse est r'.

Par suite les composantes de la vitesse du corps par rapport aux axes fixes dans l'espace sont

$$\bar{p} = \bar{p}' + r'\alpha'_3, \qquad \bar{q} = \bar{q}' + r'\beta'_3, \qquad \bar{r} = \bar{r}' + r'\gamma'_3.$$

§ 7. *Résumé des résultats obtenus.*

Nous avons vu que le mouvement du corps peut s'exprimer d'une manière relativement simple, si on introduit outre le système d'axes fixe dans l'espace, et le système fixe dans le corps, un troisième système dont le troisième axe coïncide avec l'axe du moment principal d'inertie distingué. Le mouvement relatif du corps par rapport à ce système est donc une rotation autour de l'axe des z, et le système est choisi de manière que la vitesse de rotation soit la moitié de la composante de la vitesse de rotation du corps prise par rapport à l'axe du plus petit moment principal d'inertie.

Si maintenant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p, q, r, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ sont les cosinus directeurs et les composantes de la vitesse de rotation pour le système fixe dans le corps, et si $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$, $p', q', r', \bar{p}', \bar{q}', \bar{r}'$ ont la même signification pour le nouveau système d'axes introduit, enfin si u et v sont les cosinus directeurs de l'axe passant par le centre de gravité du corps, par rapport au premier et au deuxième axe du nouveau système, on a les égalités suivantes

$$\alpha_3 = \alpha'_3, \qquad \beta_3 = \beta'_3, \qquad \gamma_3 = \gamma'_3, \qquad r = 2r',$$

$$\alpha_1 \pm i\alpha_2 = \frac{\alpha'_1 \pm i\alpha'_2}{u \pm iv}, \qquad \beta_1 \pm i\beta_2 = \frac{\beta'_1 \pm i\beta'_2}{u + iv}, \qquad \gamma_1 \pm i\gamma_2 = \frac{\gamma'_1 \pm i\gamma'_2}{u \pm iv},$$

$$p \pm iq = \frac{p' \pm iq'}{u \pm iv},$$

$$\bar{p} = \bar{p}' + r'\alpha'_3, \qquad \bar{q} = \bar{q}' + r'\beta'_3, \qquad \bar{r} = \bar{r}' + r'\gamma'_3.$$

u_1, u_2, désignent des fonctions linéaires de t $g_{11}t + h_1$, $g_{12}t + h_2$ qui sont réelles, abstraction faite de demi-périodes additives, au contraire u'_1, u'_2 désignent un couple de constantes qui sont imaginaires si on fait abstraction de demi-périodes additives.

De plus l, m, n, t_0 sont des constantes, dont nous avons déterminé les valeurs plus haut. m est une grandeur imaginaire, tandis que les autres sont réelles. Par suite, la fonction u_3 que nous avons définie par l'équation $u_3 = (l + im)(t - t_0)$ a, elle aussi, des valeurs réelles. Les indices $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \lambda, \mu$ désignent les nombres $0, 1, 2, 3, 4$ dans un ordre convenablement choisi.

Si nous désignons par Δ et ∇ les symboles opératoires,

$$\Delta F(x_1, x_2) = (l + im) F(x_1, x_2) - i\left(\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} g_{11} + \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} g_{12}\right),$$

$$\nabla F(x_1, x_2) = \Delta\Delta F(x_1, x_2) - l\Delta F(x_1, x_2) + \left(n - m^2 - l^2 + \frac{e_4 + e_5}{2}\right) F(x_1, x_2),$$

et si nous désignons par $|\lambda|$ un nombre qui en même temps que l'indice λ soit pair ou impair, on obtient pour les cosinus directeurs les formules suivantes, dans lesquelles la sommation se rapporte à l'indice $\varkappa$ qui parcourt les valeurs $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$

$$\gamma_1' = i^{|\lambda|} \frac{\sum' i^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} (-1)^{\sum n^{\lambda} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa\lambda}}{\sum' i^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa} \vartheta(u_1, u_2)},$$

$$\gamma_2' = i^{|\mu|} \frac{\sum' i^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} (-1)^{\sum n^{\lambda} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa\mu}}{\sum' i^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa}},$$

$$\gamma_3' = i^{|\lambda\mu|} \frac{\sum' i^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} (-1)^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa\lambda\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa\lambda\mu}}{\sum' i^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\lambda\mu} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa}},$$

$$\alpha_1' \pm i\beta_1' = i^{|\lambda|} (-1)^{\sum n^{13} m^{\lambda}} \frac{\sum' i^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} (\mp 1)^{|\varkappa\lambda|} (-1)^{\sum n^{\varkappa} n^{13\varkappa\lambda}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1 \pm u_1', u_2 \pm u_2')_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\lambda}}{\sum' i^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa}} e^{\pm iu_3},$$

$$\alpha_2' \pm i\beta_2' = i^{|\mu|} (-1)^{\sum n^{13} m^{\mu}} \frac{\sum' i^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} (\mp 1)^{|\lambda\mu|} (-1)^{\sum n^{\varkappa} m^{13\varkappa\mu}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1 \pm u_1', u_2 \pm u_2')_{13\varkappa\mu} \vartheta_{13\varkappa\mu}}{\sum' i^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa}} e^{\pm iu_3},$$

$$\alpha_3' \pm i\beta_3' = i^{|\lambda\mu|} (-1)^{\sum n^{13} m^{\lambda\mu}} \frac{\sum' i^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} (\mp 1)^{|\varkappa\lambda\mu|} (-1)^{\sum n^{\varkappa} m^{13\varkappa\lambda\mu}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1 \pm u_1', u_2 \pm u_2')_{13\varkappa\lambda\mu} \vartheta_{13\varkappa\lambda\mu}}{\sum' i^{\sum n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa}} e^{\pm iu_3};$$

pour les composantes de la vitesse de rotation suivant les axes propres du système:

$$p' = i^{|\lambda|} \frac{\sum i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} (-1)^{\Sigma n^{\lambda} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa\lambda}}{\sum i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa}},$$

$$q' = i^{|\mu|} \frac{\sum i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} (-1)^{\Sigma n^{\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa\mu}}{\sum i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa}},$$

$$r' = i^{|\lambda\mu|} \frac{\sum i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} (-1)^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa\lambda\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa\lambda\mu}}{\sum i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa}};$$

et pour les composantes de la vitesse de rotation suivant les axes fixes dans l'espace:

$$\bar{r}' = \text{const.} = l,$$

$$\bar{p}' \pm i\bar{q}' = \pm e^{\pm i u_3} \frac{\sum i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} (\mp 1)^{|\varkappa| + \Sigma n^{\varkappa} m^{13\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1 \pm u'_1, u_2 \pm u'_2)_{13\varkappa} \Delta \vartheta_{13\varkappa}}{\sum i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa} \vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa}}.$$

Enfin les cosinus directeurs du premier axe fixe dans le corps par rapport aux trois noûveaux axes introduits

$$u = -2 i^{|\lambda|} \frac{\sum i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} (-1)^{\Sigma n^{\lambda} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \nabla \vartheta(u'_1, u'_2)_{13\varkappa\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{13\varkappa\lambda}}{\sum i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa}},$$

$$v = -2 i^{|\lambda|} \frac{\sum i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} (-1)^{\Sigma n^{\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \nabla \vartheta(u'_1, u'_2)_{13\varkappa\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{13\varkappa\mu}}{\sum i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^{\varkappa}} \vartheta_{13\varkappa\lambda} \vartheta_{13\varkappa\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa}},$$

$$w = 0.$$

Il est remarquable que les deux mouvements dans lesquels nous avons décomposé la rotation du corps appartiennent tous les deux à un type général, dont des autres cas spéciaux représentent les mouvements à la Poinsot et le mouvement d'un corps solide dans un liquide que j'ai traité dans un travail publié dans le Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 109.

Berlin, janvier 1891.

ZUR THEORIE DER LINEAREN SUBSTITUTIONEN

VON

E. NETTO

in GIESSEN.

Die Überführung einer linearen Substitution

$$X_\lambda = \sum_\mu c_{\lambda\mu} x_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

in ihre Normalform

$$U_\lambda = \rho_\lambda u_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

ist ohne jede Schwierigkeit, sobald die charakteristische Gleichung

$$| c_{\lambda\mu} - \rho\varepsilon_{\lambda\mu} | = 0 \qquad (\varepsilon_{\lambda\lambda} = 1;\ \varepsilon_{\lambda\mu} = 0 \text{ falls } \lambda \neq \mu \text{ ist})$$

nur verschiedene Wurzeln besitzt. Anders wird es, wenn man diese Bedingung fallen lässt. Ich habe im Folgenden die Frage behandelt, ob es möglich ist, von der einfach herzustellenden Normalform einer nicht singulären Substitution zu der einer beliebigen benachbarten überzugehen, selbst in dem Falle, dass die charakteristische Gleichung der letzten mehrfache Wurzeln besitzt.

1.

In den Paragrafen 147—157 seines *Traité des substitutions* giebt Herr C. JORDAN eine »kanonische Form» der linearen Substitutionen von n Veränderlichen. Dieselbe versagt aber, sobald die Determinante der Substitution verschwindet. Eine leichte Abänderung der Methode führt

jedoch zu allgemeingültigen Ausdrücken. Das Resultat, welches sich dabei ergiebt, ist das folgende:

Es sei

$$(1)\quad \Delta(\rho) = \pm(\rho-\rho_1)^{\sigma_1}(\rho-\rho_2)^{\sigma_2}\dots(\rho-\rho_\tau)^{\sigma_\tau} \qquad (\rho_\alpha \neq \rho_\beta;\ \Sigma\sigma = n)$$

die charakteristische Function der Substitution

$$(2)\quad X_\lambda = \sum_\mu c_{\lambda\mu} x_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n);$$

dann lässt diese sich durch die Einführung linearer homogener Verbindungen der x_μ als neuer Veränderlichen auf die Form bringen

$$
(3)\quad
\begin{array}{llll}
U_1' = \rho_1 u_1', & U_1'' = u_1' + \rho_1 u_1'', & \dots, & U_1^{(\pi)} = u_1^{(\pi-1)} + \rho_1 u_1^{(\pi)}, \\
U_2' = \rho_1 u_2', & U_2'' = u_2' + \rho_1 u_2'', & \dots, & U_2^{(\pi_2)} = u_2^{(\pi_2-1)} + \rho_1 u_2^{(\pi_2)}, \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
U_{h_1}' = \rho_1 u_{h_1}', & U_{h_1}'' = u_{h_1}' + \rho_1 u_{h_1}', & \dots & \\
V_1' = \rho_2 v_1', & V_1'' = v_1' + \rho_2 v_1'', & \dots, & V_1^{(\tau)} = v_1^{(\tau-1)} + \rho_2 v_1^{(\tau)}, \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

$$(\pi + \pi_2 + \dots + \pi_{h_1} = \sigma_1\ ,\ \tau + \tau_2 + \dots + \tau_{h_2} = \sigma_2\ , \dots).$$

Schreibt man jetzt die charakteristische Determinante der Substitution, die ja durch die Einführung der $u\,.\,v\,,\dots$ keine Änderung erfahren hat, in ihrer zu (3) gehörigen Form nieder, so enthält sie nur in der Hauptdiagonale und in der dazu parallelen, links benachbarten Reihe von Null verschiedene Elemente. In der Hauptdiagonale steht zuerst σ_1-mal das Glied $\rho_1 - \rho$, dann σ_2-mal $\rho_2 - \rho$, u. s. f. In der links benachbarten Parallelreihe steht in allen zu U_α'', U_α''', ..., V_α'', V_α''', ... gehörigen Zeilen eine 1, sonst überall eine Null.

Die Glieder u_α oder $v_\alpha \dots$, die in (3) einer und derselben Zeile angehören, wollen wir einer *Kette der Normalform* zurechnen; die Anzahl der Glieder einer Kette werde als ihre *Ordnung* bezeichnet; die Ausdrücke $u\,,\,v\,,\dots$ wollen wir die *Normalcoordinaten* nennen.

Erwähnt sei der besondere Fall, in welchem die charakteristische Function die Form ρ^n annimmt. Hier erhält man

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = \varepsilon_2 u_1, \qquad U_3 = \varepsilon_3 u_2\ , \quad \dots, \quad U_n = \varepsilon_n u_{n-1},$$

wobei die ε beliebig einen der Werte o, 1 annehmen können. Daraus lässt sich dann, wie leicht zu sehen ist, die allgemeine Form von (2) angeben. Es sei

$$u_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu} x_\mu, \qquad x_\lambda = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} u_\mu, \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$$

dann hat man, falls $\varepsilon_1 = 0$ und $u_0 = 0$ gesetzt wird

$$X_\lambda = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} U_\mu = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} \varepsilon_\mu u_{\mu-1} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\lambda\mu} a_{\mu-1,\nu} \varepsilon_\mu x_\nu \qquad \begin{pmatrix} \lambda, \nu = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, n \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1 \end{pmatrix}$$

als allgemeine Form derjenigen Substitutionen, die bei mehrfacher Wiederholung schliesslich alle Variablen zu Null machen.

2.

Wir behandeln jetzt die Aufgabe, die *Elementarteiler* bei der zu § 1, (3) gehörigen Determinante der Normalform zu bestimmen. Sie sind nach der Einführung des Herrn Weierstrass folgendermassen zu definiren: Es sei $(\rho_a - \rho)^{p_r}$ die höchste Potenz von $(\rho_a - \rho)$, welche alle r^{ten} Subdeterminanten, d. h. alle von der Ordnung $n - r$ teilt, dann werden

$$(1) \qquad (\rho_a - \rho)^{p_0 - p_1}, \ (\rho_a - \rho)^{p_1 - p_2}, \ (\rho_a - \rho)^{p_2 - p_3}, \ \ldots$$

die zu $(\rho_a - \rho)$ gehörigen Elementarteiler.

Um diese in unserem Falle zu bestimmen, bedarf es einiger Voruntersuchungen.

Wir betrachten zuerst die Subdeterminanten der zu § 1, (3) gehörigen Determinante Δ, und bezeichnen sie durch

$$(2) \qquad \Delta_{\alpha_1\beta_1;\, \alpha_2\beta_2, \ldots, \alpha_r\beta_r},$$

wobei die ersten Indices sich auf die Ordnung der weggelassenen Zeilen $(Z_{\alpha_1}, Z_{\alpha_2}, \ldots, Z_{\alpha_r})$, die zweiten Indices β sich auf die Ordnung der weggelassenen Colonnen $(C_{\beta_1}, C_{\beta_2}, \ldots, C_{\beta_r})$ beziehen. Dabei können wir natürlich voraussetzen

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots; \qquad \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots.$$

Dann erkennt man zunächst, dass (2) identisch verschwindet, falls $\beta_1 < \alpha_1$ ist. Denn tilgt man in unserer Determinante die Colonne C_{β_1}, dann treten in die zurückbleibende Matrize von $n(n-1)$ Gliedern, welche für den Augenblick mit $d_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden sollen, für die Elemente

$$(3)\qquad \begin{matrix} d_{1,\beta_1} & d_{1,\beta_1+1} & \dots & d_{1,n-1} \\ d_{2,\beta_1} & d_{2,\beta_1+1} & \dots & d_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{\beta_1,\beta_1} & d_{\beta_1,\beta_1+1} & \dots & d_{\beta_1,n-1} \end{matrix}$$

nur Nullen ein; denn alle diese Elemente standen in Δ rechts von der Diagonale. Tilgt man dann die weiteren Zeilen und Colonnen, so wird, wenn $\alpha_1 > \beta_1$ ist, immer noch ein System von $\beta_1[(n-r)-(\beta_1-1)]$ Nullen zurückbleiben, die in β_1 Zeilen zu je $(n-r)-(\beta_1-1)$ angeordnet sind. Das genügt aber, um (2) zum Verschwinden zu bringen.

Soll also (2) von Null verschieden sein, so ist $\alpha_1 \leqq \beta_1$ zu setzen.

Ferner verschwindet (2), wenn $\beta_1 \geqq \alpha_2$ ist. Denn wenn $\alpha_1 < \alpha_2 \leqq \beta_1$ angenommen wird, dann entsteht aus Δ nach der Tilgung von Z_{α_1}, Z_{α_2} eine Matrize von $n(n-2)$ Gliedern, welche wiederum für den Augenblick mit $d_{\alpha,\beta}$ bezeichnet werden mögen. In ihr werden die Elemente

$$(4)\qquad \begin{matrix} d_{\alpha_2,1} & d_{\alpha_2,2} & \dots & d_{\alpha_2,\alpha_2} \\ d_{\alpha_2+1,1} & d_{\alpha_2+1,2} & \dots & d_{\alpha_2+1,\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-2,1} & d_{n-2,2} & \dots & d_{n-2,\alpha_2} \end{matrix}$$

sämmtlich gleich Null, da sich alle diese in Δ links von der ersten Parallelreihe zur Hauptdiagonale befanden. Tilgt man nun die übrigen Zeilen und Colonnen, so bleiben, falls $\beta_1 > \alpha_2$ ist, immer noch

$$[(n-r)-(\alpha_2-1)]\alpha_2$$

Nullen in α_2 Colonnen zu je $(n-r)-(\alpha_2-1)$ verteilt zurück, und dadurch wird das Verschwinden von (2) bewirkt. Ist aber $\beta_1 = \alpha_2$, so betrachten wir statt (4) das System von Nullen

$$(5)\qquad \begin{matrix} d_{\alpha_2-1,1} & d_{\alpha_2-1,2} & \ldots & d_{\alpha_2-1,\alpha_2-1} \\ d_{\alpha_2,1} & d_{\alpha_2,2} & \ldots & d_{\alpha_2,\alpha_2-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n-2,1} & d_{n-2,2} & \ldots & d_{n-2,\alpha_2-1}, \end{matrix}$$

und dies führt nach Tilgung der übrigen vorgeschriebenen Zeilen und Colonnen auf ein System von $[(n-r)-(\alpha_2-2)]\ (\alpha_2-1)$ Nullen in (2). Diese Determinante verschwindet also auch hier.

Will man demnach das identische Verschwinden von (2) vermeiden, so muss man $\alpha_1 \leqq \beta_1 < \alpha_2$ annehmen.

Unterdrückt man darauf, um (2) zu bilden in $\Delta(\rho)$ die beiden Reihen $Z_{\alpha_1}, C_{\beta_1}$, so entsteht zunächst eine Matrix von $(n-1)(n-1)$ Elementen, die für den Augenblick wieder mit $d_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden mögen. In ihr ist jedes Element $d_{\lambda\mu}$ bei dem $\lambda \leqq \mu$, $\mu > \beta_1$ oder bei dem $\alpha > \beta_1$, $\mu \leqq \beta_1$ ist, gleich Null. Folglich zerfällt $\Delta_{\alpha_1\beta_1}$ in das Product aus einer Determinante $(\beta_1 - 1)^{\text{ter}}$ und einer solchen $(n-\beta_1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Jene erste bleibt bei den weiteren Reihenstreichungen, die auf (2) führen, unberührt. Die zweite hat dieselbe Bildung wie $\Delta(\rho)$ und es gelten daher für den Übergang zunächst zu $\Delta_{\alpha_1\beta_1,\alpha_2\beta_2}$ dieselben Überlegungen. Somit erkennt man:

Damit (2) von Null verschieden sei, müssen die Beziehungen gelten

$$\alpha_1 \leqq \beta_1 < \alpha_2 \leqq \beta_2 < \alpha_3 \leqq \beta_3 < \ldots .$$

Findet dies statt, dann zerfällt, wie sich soeben gezeigt hat, (2) in ein Product von Subdeterminanten, deren jede ihrem Hauptgliede gleich wird, da bei dem einen Teile derselben rechts, bei dem anderen links von der Diagonale nur Nullen stehen. Das Erste findet bei dem ersten, dritten, fünften, ... Factor statt; diesen kommen die Gradzahlen $(\alpha_1 - 1)$, $(\alpha_2 - 1 - \beta_1)$, $(\alpha_3 - 1 - \beta_2)$, ... zu. Das zweite findet bei dem zweiten, vierten, sechsten, ... Factor statt; diesen kommen die Gradzahlen der Determinanten $(\beta_1 - \alpha_1)$, $(\beta_2 - \alpha_2)$, $(\beta_3 - \alpha_3)$, ... zu. Die Determinanten der ersten Art haben in der Hauptdiagonale nur Elemente $(\rho_\alpha - \rho)$ und ihre Werte werden sonach Potenzen von solchen Differenzen. Die Determinanten der zweiten Art haben in der Hauptdiagonale nur Grössen

1 oder 0. Eine Null tritt dann und nur dann auf, wenn eine der erwähnten Partialdeterminanten aus einer der Ketten in die folgende hinüber greift; denn die der Hauptdiagonale benachbarte linke Parallelreihe, welche hier in die Diagonalreihe der zweiten, vierten, ... Partialdeterminante gerückt ist, enthält stets und auch nur bei Beginn einer Kette das Glied 0. Es ergiebt sich daher weiter:

Damit (2) *nicht verschwinde, ist ferner nötig, dass Z_{α_1} und C_{β_1}, ebenso Z_{α_2} und C_{β_2}, ... jedesmal solche Diagonalglieder aus $\Delta(\rho)$ ausschneiden, welche derselben Kette angehören.*

Nach diesen Untersuchungen ist es leicht, die zu $\rho_a - \rho$ gehörigen Elementarteiler zu bestimmen. Dabei muss die Gesammtheit der nicht verschwindenden $\Delta_{\alpha_1\beta_1}$ betrachtet werden. Wählt man Z_{α_1}, C_{β_1} so, dass die Diagonalglieder, welche $\Delta_{\alpha_1\beta_1}$ weniger hat als Δ, einer zu ρ_1 gehörigen Kette entnommen sind, dann tritt für die zweite Partialdeterminante der zweite, soeben erwähnte Fall ein. Es werden $\beta_1 - \alpha_1$ von den σ_1 Elementen $\rho_1 - \rho$, die in der Diagonale von $\Delta(\rho)$ vorkommen, jetzt ausscheiden. Nimmt man also $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = \pi$, dann fehlt die i. A. erste Determinante ganz; die zweite, hier an erster Stelle auftretende gehört dem zweiten Typus an, und so fällt, als höchst mögliche Potenz $(\rho_1 - \rho)^{\pi-1}$ fort, und $\Delta_{\alpha_1\beta_1}$ enthält $(\rho_1 - \rho)$ nur noch in der Potenz $(\sigma_1 - 1) - (\pi - 1) = \sigma_1 - \pi$. Eine höhere Potenz kann nicht in Wegfall kommen, ohne dass $\Delta_{\alpha_1\beta_1} = 0$ wird. Die Vergleichung mit (1) zeigt, dass $p_0 = \sigma_1$, $p_1 = \sigma_1 - \pi$ wird, und dass also π der Exponent des ersten Elementarteilers ist. Diese Potenz von $\rho_1 - \rho$ ist die höchste, welche alle Subdeterminanten $\Delta_{\alpha_1\beta_1}$ von Δ teilt.

Um aus $\Delta_{\alpha_1\beta_1,\alpha_2\beta_2}$ eine möglichst hohe Potenz von $\rho_1 - \rho$ ausscheiden zu können, müssen die beiden entsprechenden Partialdeterminanten zweiter Art möglichst hohe Potenzen von $\rho_1 - \rho$ enthalten; dies findet statt, wenn man $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = \pi$; $\alpha_2 = \pi + 1$, $\beta_2 = \pi + \pi_2$ setzt. Dann erhält man, da zwei Determinanten erster Art von den Ordnungen

$$\alpha_1 - 1 = 0, \qquad \alpha_2 - 1 - \beta_1 = 0$$

vorhanden sind, $(\rho_1 - \rho)$ in der Potenz $\sigma_1 - \pi - \pi_2$. Dies ist gemäss (1) gleich p_2 zu setzen, und dann wird $p_1 - p_2 = \pi_2$. Geht man in dieser Weise fort, so erhält man das Resultat:

Die Determinante $\Delta(\rho)$ erscheint, in ihre Elementarteiler aufgelöst, unter der Form

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) = \pm\, & (\rho_1 - \rho)^{\pi}(\rho_1 - \rho)^{\pi_2}(\rho_1 - \rho)^{\pi_3} \dots \\ & (\rho_2 - \rho)^{\tau}(\rho_2 - \rho)^{\tau_2}(\rho_2 - \rho)^{\tau_3} \dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{6}$$

so dass die Ordnungen der Ketten, ihrer Grösse nach geordnet, als Exponenten der aufeinanderfolgenden Elementarteiler auftreten.

3.

Wir wollen jetzt von der Substitution (2) § 1 mit den Coefficienten $c_{\lambda\mu}$ zu einer neuen Substitution dadurch übergehen, dass wir jedem Elemente $c_{\lambda\mu}$ noch additiv $\gamma_{\lambda\mu} . t$ hinzufügen. Die γ sollen dabei beliebige endliche Constanten sein, während t eine unendlich kleine Veränderliche ist. Es folgt leicht, dass die Wahl der γ so getroffen werden kann, dass

$$\theta(\rho) = \theta = |c_{\varkappa\lambda} + \gamma_{\varkappa\lambda} t - \rho\varepsilon_{\varkappa\lambda}| = 0$$

für alle von Null verschiedenen, hinlänglich kleinen Werte t nur ungleiche Wurzeln besitzt. Führt man die erste Substitution durch die Benutzung der Normalcoordinaten $u_\varkappa = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\lambda$ in die Normalform über, so wird die gleichzeitige Einführung der u in die zweite Substitution diese in eine Form bringen, welcher jene Normalform benachbart ist, und Coefficienten besitzen, welche in t linear sind.

Wir wollen die Wurzeln von $\theta = 0$ untersuchen, aber nicht gleich in voller Allgemeinheit, sondern zunächst in dem Falle, dass $\Delta(\rho) = (\rho_1 - \rho)^n$ wird. Es ist ferner nur eine Erleichterung in der Bezeichnung, wenn wir $\rho_1 = 0$ setzen. Wir wollen annehmen, dass in der zu θ gehörigen Substitution k Ketten, bezw. von der Ordnungen

$$h_1 \geqq h_2 \geqq h_3 \geqq \dots \geqq h_k$$

vorhanden sind; alle Diagonalglieder in θ haben die Form $\gamma_{\varkappa\varkappa} t - \rho$; ferner ist, wenn die Glieder in θ mit $d_{\varkappa\lambda}$ bezeichnet werden,

$$
(1)\quad \begin{array}{l}
d_{21} = \gamma_{21} \cdot t + 1, \quad d_{32} = \gamma_{32} \cdot t + 1, \quad \ldots, \quad d_{h_1, h_1-1} = \gamma_{h_1, h_1-1} \cdot t + 1, \\
d_{h_1+1, h_1} = \gamma_{h_1+1, h_1} \cdot t, \quad d_{h_1+2, h_1+1} = \gamma_{h_1+2, h_1+1} \cdot t + 1, \quad \ldots, \\
d_{h_1+h_2, h_1+h_2-1} = \gamma_{h_1+h_2, h_1+h_2-1} \cdot t + 1, \\
d_{h_1+h_2+1, h_1+h_2} = \gamma_{h_1+h_2+1, h_1+h_2} \cdot t, \quad d_{h_1+h_2+2, h_1+h_2+1} = \gamma_{h_1+h_2+2, h_1+h_2+1} \cdot t + 1, \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

während die übrigen $d_{\varkappa\lambda}$ alle gleich den $\gamma_{\varkappa\lambda} \cdot t$ zu setzen sind.

Entwickelt man nun $\theta(\rho)$ nach Potenzen von ρ, dann wird $\pm \rho^{n-\alpha}$ mit der Summe aller der Subdeterminanten α^{ter} Ordnung von $\theta(0)$ multiplicirt werden, deren Hauptdiagonalen der Hauptdiagonale von $\theta(0)$ entnommen sind. Es kommt uns darauf an, die niedrigste, in dieser Summe vorkommende Potenz von t zu ermitteln.

Für $\alpha = 1$ finden wir sofort $t^1 \Sigma \gamma_{\lambda\lambda}$.

Für $\alpha = 2$ betrachten wir, wenn $h_1 > 1$ ist, die Determinante

$$
\begin{vmatrix} \gamma_{11} t & \gamma_{12} t \\ \gamma_{21} t + 1 & \gamma_{22} t \end{vmatrix}
$$

und sehen, dass auch hier t^1 das niedrigste auftretende Glied ist.

Für $\alpha = 3$ folgt, wenn $h_1 > 2$ ist, das gleiche Resultat, wie aus

$$
\begin{vmatrix} \gamma_{11} t & \gamma_{12} t & \gamma_{13} t \\ \gamma_{21} t + 1 & \gamma_{22} t & \gamma_{23} t \\ \gamma_{31} t & \gamma_{32} t + 1 & \gamma_{33} t \end{vmatrix}
$$

hervorgeht.

Das setzt sich so fort, bis zu $\alpha = h_1$, wo in der entsprechend gebildeten Determinante noch t^1 auftritt.

Nimmt man aber weiter $\alpha = h_1 + 1$, so sieht man unmittelbar, dass t^1 nicht mehr auftreten kann. Denn dies ist nur möglich, wenn in einer der als Coefficienten auftretenden Determinanten alle Glieder der zur Hauptreihe links benachbarten Reihe den Summanden 1 enthalten; das geht hier aber nicht mehr, da keine Kette von hinreichend hoher Ordnung ist. Andererseits erkennt man aus der Determinante $|d_{\varkappa\lambda}|$, $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, h_1 + 1)$, dass ein Glied mit t^2 auch wirklich erscheint.

In gleicher Art folgt für $\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, h_1 + 2$, dann für $\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, h_1 + 3$, u. s. f. bis zu $\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, h_1 + h_2$, dass jedesmal Glieder mit t^2 vorhanden sind.

Für $\alpha = h_1 + h_2 + 1$ bis $\alpha = h_1 + h_2 + h_3$ giebt es Glieder mit t^3, u. s. f.

Es wird daher die Entwicklung die folgende werden:

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
\theta(\rho) = \pm \rho^n &+ A_1 t\rho^{n-1} + A_2 t\rho^{n-2} + \ldots + A_{h_1} t\rho^{n-h_1} \\
&+ B_1 t^2\rho^{n-h_1-1} + B_2 t^2\rho^{n-h_1-2} + \ldots + B_{h_2} t^2\rho^{n-h_1-h_2} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ F_1 t^k\rho^{h_k-1} + F_2 t^k\rho^{h_k-2} + \ldots + F_{h_k} t^k;
\end{aligned}
$$

die Exponenten der letzten Zeile folgen aus

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_k = n.$$

Freilich ist bisher nur gezeigt worden, dass die angegebenen Potenzen von t die niedrigsten sind, die überhaupt vorkommen können, aber noch nicht, dass sie auch wirklich auftreten. Dies zeigen wir am einfachsten an folgendem Beispiele: Es ist, wie man ohne Schwierigkeit erkennt,

$$
(-1)^n \begin{vmatrix}
t-\rho & t & t & t & \ldots & t \\
a_2 & -\rho & . & . & \ldots & . \\
. & a_3 & -\rho & . & \ldots & . \\
. & . & a_4 & -\rho & \ldots & . \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
. & . & . & . & \ldots & -\rho
\end{vmatrix}
$$

$$= \rho^n - t\rho^{n-1} - a_2 t\rho^{n-2} - a_2 a_3 t\rho^{n-3} - a_2 a_3 a_4 t\rho^{n-4} - \ldots - a_2 a_3 \ldots a_n t.$$

Setzt man hierin die a_λ gleich den $d_{\lambda,\lambda-1}$ aus (1), dann liefert diese Determinante ein Beispiel für $\theta(\rho)$, bei welchem die Form (2) wirklich auftritt. Dieselbe Form muss daher für unbestimmte γ bestehen.

Nachdem diese erste Frage entschieden ist, wollen wir an zweiter Stelle die Wurzelentwickelungen für $\theta(\rho) = 0$ gemäss (2) vornehmen. Dies gestaltet sich bei der Anwendung des sogenannten NEWTON'schen

Parallelogramms[1] besonders einfach. Es handelt sich hierbei darum, die Glieder zu bestimmen, welche auf der rechten Seite von (2) die niedrigste Dimension erhalten, wenn man für ρ etwa t^{α} einsetzt, und darum, die passenden Werte von α anzugeben. Dabei kommen ausser ρ^{n} sicher nur die Schlussglieder der einzelnen Zeilen in Frage, also

$$(3) \qquad t^{k}, \; t^{k-1+\alpha h_k}, \; t^{k-2+\alpha(h_k+h_{k-1})}, \; t^{k-3+\alpha(h_k+h_{k-1}+h_{k-2})}, \; \ldots, \; t^{\alpha n}.$$

Hier ist zu beachten, dass man hat

$$h_k \leqq h_{k-1} \leqq h_{k-2} \leqq \cdots \leqq h_1;$$

daraus folgt, dass für

$$\alpha = \frac{1}{h_k} \quad \text{die beiden ersten Exponenten; für}$$

$$(4) \qquad \alpha = \frac{1}{h_{k-1}} \quad \text{der zweite und der dritte Exponent; für}$$

$$\alpha = \frac{1}{h_{k-2}} \quad \text{der dritte und der vierte Exponent u. s. w.}$$

die niedrigsten Werte annehmen. Dieses Verhältnis wird auch dann nicht gestört, wenn mehrere der h einander gleich werden; dann werden eben nur die entsprechenden α und die Exponenten selbst einander gleich.

Nach dem NEWTON'schen Satze ergeben sich dann die Entwickelungen

$$\begin{array}{llll}
\rho_1 = \mathfrak{P}_1\left(t^{\frac{1}{h_1}}\right), & \rho_2 = \mathfrak{P}_1\left(\omega_1^1 t^{\frac{1}{h_1}}\right), & \ldots, & \rho_{h_1} = \mathfrak{P}_1\left(\omega_1^{h_1-1} t^{\frac{1}{h_1}}\right), \\
\rho_{h_1+1} = \mathfrak{P}_1\left(t^{\frac{1}{h_2}}\right), & \rho_{h_1+2} = \mathfrak{P}_2\left(\omega_2^1 t^{\frac{1}{h_2}}\right), & \ldots, & \rho_{h_1+h_2} = \mathfrak{P}_2\left(\omega_2^{h_2-1} t^{\frac{1}{h_2}}\right), \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

wobei $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ Potenzreihen bedeuten, die nach ganzen Potenzen der

[1] Vgl. BALTZER: *Analytische Geometrie,* S. 305. PUISEUX: *Untersuchungen über die algebraischen Functionen,* dargestellt von H. FISCHER, S. 15 ff.

Argumente fortschreiten, und die $\omega_1, \omega_2, \ldots$ primitive $h_1^{\text{te}}, h_2^{\text{te}}, \ldots$ Einheitswurzeln sind.

Gleiches folgt für den allgemeinen Fall, sobald die Potenzen (3) auch bei der allgemeinen Determinante als diejenigen der niedrigsten Ordnungen bestehen bleiben. Es ist auf die folgende Art leicht zu sehen, dass dies tatsächlich eintrifft.

Wir wollen eine Substitution $(n+m)^{\text{ter}}$ Ordnung in der Normalform annehmen; $\rho = 0$ sei wie bisher die n-fache Wurzel; die übrigen Wurzeln mögen $\rho_1, \rho_2, \ldots$ heissen. Wir bilden wie vorher die Determinante $\Delta_1(\rho)$ der benachbarten Substitution. Ihre ersten n Zeilen stimmen in ihren ersten n Colonnen mit dem $\theta(\rho)$, welches wir soeben untersucht haben, überein. Wir entwickeln nun $\Delta_1(\rho)$ dem Laplace'schen Satze gemäss in eine Summe von Producten aus Determinanten, die den n ersten Zeilen, und solchen, die den m letzten entnommen sind. Dabei erhält man zunächst $\theta(\rho)$ mit einer Determinante $\Delta_2(\rho)$ der m^{ten} Ordnung multiplicirt. Diese beginnt mit einer Constanten bei ihrer Entwickelung nach Potenzen von ρ; so dass also sämmtliche in (2) enthaltenen Glieder wieder auftreten; und diese sind in $\theta(\rho) \,.\, \Delta_2(\rho)$ die der niedrigsten Dimension, da jede Multiplication von (2) mit einem $\rho^\tau t^\sigma$ nur die Dimension erhöht. Ausser dem betrachteten Producte $\theta(\rho) \,.\, \Delta_2(\rho)$ kommt eine Reihe ähnlicher Glieder vor, die aus jenem durch Austausch von Colonnen entstehen. Hierbei fallen aber in jedem Factor höchstens Glieder, die gleich 1 sind, aus der Diagonal-Parallelreihe fort, d. h. es treten allenfalls höhere aber niemals niedere Potenzen von t bei denselben Potenzen von ρ auf. Die Dimension der Glieder vermindert sich daher nicht.

Ferner liefern die Annahmen (4) genau die n Wurzeln, welche für $t = 0$ zu $\rho = 0$ werden; weitere Wurzeln und weitere, hierher gehörige Glieder niedrigster Dimension giebt es also nicht.

Folglich gelten die über die Wurzelentwickelung gemachten Schlüsse.

Ist eine Substitution mit den Coefficienten $c_{\varkappa\lambda}$ gegeben, welche $\rho = \rho_0$ als Wurzel der charakteristischen Gleichung besitzt, und bildet man eine Substitution mit den Coefficienten $c_{\varkappa\lambda} + \gamma_{\varkappa\lambda} . t$, worin $\gamma_{\varkappa\lambda}$ unbestimmte Constanten und t eine beliebig kleine Veränderliche bedeuten, so möge es für

$$\Delta(c_{\varkappa\lambda} + \gamma_{\varkappa\lambda} t - \rho \varepsilon_{\varkappa\lambda}) = 0$$

die Entwickelungen

$$\rho_1 - \rho_0 = \mathfrak{P}_1\left(t^{\frac{1}{h_1}}\right), \quad \rho_2 - \rho_0 = \mathfrak{P}_1\left(\omega_1^1 t^{\frac{1}{h_1}}\right), \ \ldots, \quad \rho_{h_1} - \rho_0 = \mathfrak{P}_1\left(\omega_1^{h_1-1} t^{\frac{1}{h_1}}\right);$$

$$\rho_{h_1+1} - \rho_0 = \mathfrak{P}_2\left(t^{\frac{1}{h_2}}\right), \ \rho_{h_1+2} - \rho_0 = \mathfrak{P}_2\left(\omega_2^1 t^{\frac{1}{h_2}}\right), \ \ldots, \ \rho_{h_1+h_2} - \rho_0 = \mathfrak{P}_2\left(\omega_2^{h_2-1} t^{\frac{1}{h_2}}\right);$$

. . . .

geben. Dann besitzt die ursprüngliche Substitution, also die für welche $t = 0$ gesetzt ist, für $\rho = \rho_0$ eine Kette der Ordnung h_1, eine zweite der Ordnung h_2, u. s. f. Die Entwickelungen der Wurzeln bestimmen also die Ordnungen der Ketten, bezw. der Elementarteiler.

4.

Zum Zwecke unserer weiteren Untersuchungen betrachten wir, wie auch schon im § 2, die Subdeterminanten $\Delta_{\alpha\beta}$ der Normalform unserer Substitution mit den Coefficienten $c_{\varkappa\lambda}$. Dabei bedeuten wie oben α, β die Indices der weggelassenen Zeile und Colonne. Um die Bezeichnung zu vereinfachen, nehmen wir $\rho = 0$ als m-fache Wurzel von $\Delta(\rho) = 0$ an und setzen die zugehörigen Zeilen in der Determinante an die erste Stelle.

Aus § 2 können wir unmittelbar das Resultat übernehmen, dass $\Delta_{\alpha\beta} = 0$ sei, wenn $\alpha > \beta$ wird.

I. Nun setzen wir zunächst $\beta \leq m$ voraus.

Ist $\alpha = 1, 2, \ldots, \beta$, so zerlegt sich $\Delta_{\alpha\beta}$ sofort in das Product einer Determinante $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die den m ersten Zeilen, und einer solchen $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung, die den $(n-m)$ letzten Zeilen von Δ entnommen ist. Die letzte sei

$$(1) \qquad A_0 + A_1\rho + A_2\rho^2 + \ldots + A_{n-m}\rho^{n-m} = T(\rho), \qquad (A_0 \neq 0);$$

dass $A_0 \neq 0$ sein muss, folgt leicht daraus, dass diese Hauptsubdeterminante die Wurzel $\rho = 0$ nicht mehr besitzt. Der erste Factor ist aus den m ersten Colonnen der m ersten Zeilen derart entnommen, dass in ihnen Z_α, C_β unterdrückt wurden. Dabei sieht man sofort, wie aus den Zeilen $Z_{\alpha+1}, Z_{\alpha+2}, \ldots, Z_{\beta-1}$ die Glieder der Parallelreihe zur Haupt-

diagonale, welche für die Substitution charakteristisch ist, in die Diagonale selbst rücken (vgl. § 2), und so folgt für diesen Factor der Wert

$$\pm \rho^{m-1-\alpha+\beta} \text{ oder } 0,$$

je nachdem Z_α, C_β in dieselbe Kette, die zu $\rho = 0$ gehört, einschneiden oder nicht.

Ist $\alpha > \beta$, so verschwindet $\Delta_{\alpha\beta}$ nach § 2.

II. Ist $\beta > m$, so zerfällt die Determinante $\Delta_{\alpha\beta}$ wieder in das Product zweier anderen, deren zweite von der Ordnung $(n - m)$ ist und aus den letzten $(n - m)$ Zeilen entnommen wird. Da aber hier C_β gestrichen ist, so wird aus den ersten Colonnen, die nur Nullen innerhalb der betreffenden letzten Zeilen enthalten, eine solche herausgenommen werden müssen. Es verschwindet daher $\Delta_{\alpha\beta}$.

Dies ergiebt

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\Delta_{\alpha\beta} = \pm A_0\rho^{m-1} \pm A_1\rho^m \pm \ldots, && (\alpha = \beta \leqq m),\\ &\Delta_{\alpha\beta} = \pm \rho^{m-1-\alpha+\beta}.\,T(\rho) \text{ oder } = 0, && (\alpha < \beta \leqq m),\\ &\Delta_{\alpha\beta} = 0, && (\text{in allen anderen Fällen}). \end{aligned}$$

Geht man von dem eben betrachteten Δ zu dem im vorigen Paragrafen untersuchten benachbarten θ mit den um $\gamma_{\varkappa\lambda}.t$ vermehrten Elementen über, so folgt modulo t.

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\theta_{\alpha\beta} \equiv \pm A_0\rho^{m-1} \pm A_1\rho^m \pm \ldots, && (\alpha = \beta \leqq m),\\ &\theta_{\alpha\beta} \equiv \pm \rho^{m-1-\alpha+\beta}.\,T(\rho) \text{ oder } \equiv 0, && (\alpha < \beta \leqq m),\\ &\theta_{\alpha\beta} \equiv 0, && (\text{in allen anderen Fällen}). \end{aligned}$$

Nun setzen wir

$$(4)\qquad \theta_{1\alpha}\xi_1 + \theta_{2\alpha}\xi_2 + \ldots + \theta_{n\alpha}\xi_n = \varphi_\alpha(\xi),$$

dann folgt aus der Fundamental-Eigenschaft der Determinanten und der Definition der Substitution mit der Determinante θ

$$\begin{aligned}
&\varphi_a(X) = \rho\varphi_a(x) + x_a\theta,\\
&\varphi_a'(X) = \rho\varphi_a'(x) + \varphi_a(x) + x_a\theta',\\
(5)\qquad &\varphi_a''(X) = \rho\varphi_a''(x) + 2\varphi_a'(x) + x_a\theta'',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_a^{(m-1)}(X) = \rho\varphi_a^{(m-1)}(x) + (m-1)\varphi_a^{(m-2)}(x) + x_a\theta^{(m-1)},
\end{aligned}$$

wobei die oberen Indices die Ableitungen der betreffenden Functionen nach ρ bezeichnen sollen. $\varphi_a^{(m-1)}$ enthält als Coefficienten nach (4)

$$(6)\qquad \theta_{1a}^{(m-1)},\ \theta_{2a}^{(m-1)},\ \ldots,\ \theta_{aa}^{(m-1)},\ \ldots,\ \theta_{na}^{(m-1)}.$$

Setzt man hierin für t und ρ jedesmal o ein, so verschwindet, wenn $a > m$ ist, nach (3) jedesmal die ganze Reihe. Ist dagegen $a < m$, so zeigt (3) dass $\theta_{aa}^{(m-1)}$ sicher von Null verschieden ist, und möglicherweise auch noch die vorhergehenden Glieder der Zeile (6), während die folgenden verschwinden.

Für $a < m$ ist also $\varphi_a^{(m-1)}(x)$ nicht gleich Null. Da $\rho = 0$ eine m-fache Wurzel von $\Delta = 0$ ist, so verschwinden $\theta^{(m-1)}, \theta^{(m-2)}, \ldots.$ Die letzte Gleichung von (5) ergiebt also für $\rho = 0$, $t = 0$

$$\varphi_a^{(m-1)}(X) = (m-1)\varphi_a^{(m-2)}(x). \qquad {\scriptstyle (t=0,\ \rho=0)}$$

Ist $\varphi_a^{(m-2)}(x)$ identisch gleich Null, so haben wir in $\varphi_a^{(m-1)}(x)$ eine zu $\rho = 0$ gehörige Normalcoordinate gefunden, wie die letzte Gleichung von (5) zeigt. Ist $\varphi_a^{(m-2)}(x)$ dagegen nicht identisch Null, so liefert die in (5) vorhergehende Gleichung

$$\varphi_a^{(m-2)}(X) = (m-2)\varphi_a^{(m-3)}(x). \qquad {\scriptstyle (t=0,\ \rho=0)}$$

Ist hier $\varphi_a^{(m-3)}(x)$ identisch Null, so hat man eine aus $\varphi_a^{(m-3)}(x)$ und $\varphi_a^{(m-2)}(x)$ bestehende Kette zweiter Ordnung erlangt, da der Factor $(m-2)$ nur formal aber nicht im Wesen eine Änderung hervorruft. Ist dagegen $\varphi_a^{(m-3)}(x)$ nicht identisch Null, so kommen wir in gleicher Weise zu einem dritten Kettengliede u. s. f.

Da endlich für $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ alle φ von einander verschieden sind, weil ja $\varphi_\alpha(x)$ mit $\theta_{\alpha\alpha}^{(m-1)}$ abbricht, so ergiebt uns das Schema (5) für $t = 0$, $\rho = 0$ alle zu der Wurzel ρ gehörigen Ketten.

Bemerken wir weiter, dass die $\varphi_\alpha(x)$ als Normalcoordinaten direct aus der vorgelegten Substitution mit den Coefficienten $c_{\lambda\mu} + \gamma_{\lambda\mu} t$ mit Hülfe der Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gebildet werden können, so erkennt man Folgendes:

Es sei eine Substitution mit den Coefficienten $c_{\varkappa\lambda}$ vorgelegt; wir bilden eine benachbarte Substitution mit den Coefficienten $c_{\varkappa\lambda} + \gamma_{\varkappa\lambda} t$, wobei t eine beliebig kleine Variable und die $\gamma_{\varkappa\lambda}$ Constanten bedeuten, die so gewählt sind, dass die zugehörige charakteristische Gleichung keine gleichen Wurzeln besitzt. Dagegen mag die charakteristische Gleichung der ersten Substitution die Wurzel $\rho = 0$ genau m-fach besitzen. Dann werden m Wurzeln der charakteristischen Gleichung der zweiten Substitution für $t = 0$ auch gleich 0.

Wir bezeichnen nun mit

$$\theta_{1\alpha}, \theta_{2\alpha}, \theta_{3\alpha}, \ldots, \theta_{n\alpha}$$

die Adjuncten der Elemente aus der α^{ten} Colonne in

$$| c_{\varkappa\lambda} + \gamma_{\varkappa\lambda} t - \varepsilon_{\varkappa\lambda} \cdot \rho |,$$

und mit $\varphi_\alpha(x)$ die lineare Function

$$\theta_{1\alpha} x_1 + \theta_{2\alpha} x_2 + \ldots + \theta_{n\alpha} x_n;$$

die Ableitungen derselben nach ρ sollen der Reihe nach durch

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(x)}{\partial \rho} = \varphi_\alpha'(x), \qquad \frac{\partial^2 \varphi_\alpha(x)}{\partial \rho^2} = \varphi_\alpha''(x), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1} \varphi_\alpha(x)}{\partial \rho^{m-1}} = \varphi_\alpha^{(m-1)}(x) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

bezeichnet werden.

Dann wird für $t = 0$, $\rho = 0$ das letzte Glied $\varphi_\alpha^{(m-1)}(x)$ der Zeile (6) *verschwinden bei $n - m$ Werten von α. Wählt man für einen der übrigen Werte von α ausser dem letzten, nicht verschwindendem Gliede noch diejenigen vorhergehenden, die gleichfalls nicht verschwinden, so bilden diese die Glieder einer Kette der Normalform in der durch die Glieder von* (6) *angegebenen*

Reihenfolge; die nicht verschwindenden $\varphi_a^{(m-1)}(x)$ *geben also die einzelnen letzten Kettenglieder.*

Durch diese Darlegungen ist der Übergang von der Normalform einer nicht singulären Substitution zur Normalform einer benachbarten singulären geliefert.

Giessen d. 25. September 1891.

ÜBER LINEARE RELATIONEN ZWISCHEN THETAPRODUCTEN

VON

A. KRAZER

in STRASSBURG i. E.

In meiner Habilitationsschrift[1] habe ich diejenigen Thetafunctionen einer Veränderlichen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, einer systematischen Behandlung in der Hinsicht unterzogen, dass ich die zwischen diesen Functionen bestehenden wesentlichen Beziehungen erforschte. Meine Untersuchungen haben später in der sorgfältig ausgeführten Dissertation des Herrn SCHLEICHER[2] eine Fortsetzung gefunden, indem derselbe ihnen das Additionstheorem und das Umkehrproblem der aus diesen Functionen gebildeten Quotienten hinzufügte.

Dass sich die nämlichen Untersuchungen für jene Thetafunctionen einer Veränderlichen, bei denen der gemeinsame Nenner r der Charakteristikenelemente 5 oder überhaupt eine ungerade Zahl ist, anstellen lassen, ohne wesentlich neue Hülfsmittel zu erfordern, war zu sehen; diese Untersuchungen hat Herr SIEVERT[3] mit Erfolg begonnen.

Nun lag aber andererseits auch der Gedanke nahe, die in meiner Habilitationsschrift angestellten Untersuchungen auf Thetafunctionen mehrerer

[1] *Über Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind,* Mathem. Annalen, Bd. 22, pag. 416.

[2] *Darstellung und Umkehrung von Thetaquotienten, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind.* Inaug. Dissertation, Würzburg 1888.

[3] *Über Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Fünfteln ganzer Zahlen bestehen.* Schulprogramm des neuen Gymnasiums in Nürnberg 1890/91.

Veränderlichen auszudehnen, umsomehr als die zur Grundlage dienende Thetaformel sich ohne weiteres für beliebiges p aufstellen liess. Dahin gehende Untersuchungen hat Herr v. BRAUNMÜHL [1] angestellt. Derselbe ging aber noch weiter, indem er auch die schönen Untersuchungen, welche Herr FROBENIUS [2] über die zum Werthe $r = 2$ gehörigen Thetafunctionen mehrerer Veränderlichen mitgetheilt hatte, auf den Fall $r = 3$ übertrug. In einer späteren Abhandlung [3] hat Herr v. BRAUNMÜHL seine Untersuchungen auf den Fall eines beliebigen r zu übertragen versucht.

Bei dem auf die Charakteristiken bezüglichen Theil solcher Untersuchungen erkennt man aber bei einiger Sorgfalt, dass eine Übertragung der im Falle $r = 2$ erhaltenen Resultate nur auf den Fall, wo r eine Primzahl ist, im ganzen Umfange geschehen kann, dass dagegen in dem Falle, wo r keine Primzahl ist, diese Resultate zum grössten Theile ihre Gültigkeit verlieren. Was ferner den auf die Thetafunctionen selbst bezüglichen Theil der erwähnten Untersuchungen betrifft, so wird man sich dabei in allen Fällen mit Vortheil als Ausgangspunkt jener Thetaformel bedienen, welche zu diesem Zwecke von Herrn PRYM und dem Verfasser [4] mitgetheilt wurde. Bei specielleren Untersuchungen erfordern aber der Fall, wo r gerade ist, und der, wo r ungerade ist, eine verschiedene Behandlung.

Die nachfolgenden Zeilen sollen einen kleinen Beitrag zur Theorie der zu einem beliebigen Werthe von r gehörigen Thetafunctionen mehrerer

---

[1] *Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, und die Additionstheoreme der zugehörigen Thetafunctionen,* Abhandl. der K. bayer. Akademie der Wiss. II. Classe, 16. Band, 2. Abth., pag. 327.

[2] *Über das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln,* Crelles Journal, Bd. 89, pag. 185, und: *Über Gruppen von Thetacharakteristiken,* Crelles Journal, Bd. 96, pag. 81.

[3] *Über Gruppen von p-reihigen Charakteristiken, die aus n^{teln} ganzer Zahlen gebildet sind und die Relationen zugehöriger Thetafunctionen n^{ter} Ordnung,* Mathem. Annalen, Bd. 37, pag. 61.

[4] *Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel,* Acta mathematica, Bd. 3, pag. 240. Es muss hier bemerkt werden, dass die Formel (25) des Herrn von Braunmühl (Math. Ann., Bd. 37, pag. 94) durch Addition jener n^λ Formeln (θ_2') entsteht, bei denen an Stelle von $[\eta]$ die n^λ Charakteristiken $(\rho\nu_\beta)$, $\beta = 0, 1, \ldots, n^\lambda - 1$, gesetzt sind.

Veränderlichen liefern. Bei anderen Untersuchungen im Gebiete der Thetafunctionen wurde der Verfasser nämlich auf die Frage hingewiesen, unter welchen Umständen r^p Thetaproducte r^{ten} Grades $\vartheta[\eta+\alpha^{(\varkappa)}]((v))$, $\varkappa = 0, 1, \ldots, r^p - 1$, bei denen die Charakteristiken $[\alpha^{(\varkappa)}]$ eine Gruppe bilden (in dem Sinne, dass die Summe irgend zweier von ihnen wieder unter ihnen enthalten ist) linearabhängig sind. Es sollen im Folgenden die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hiefür aufgesucht werden.

1.

Die Riemann'sche p-fach unendliche Thetareihe:

$$\vartheta(v_1 \mid \ldots \mid v_p) = \sum_{m_1,\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu v_\mu},$$

bei der die Parameter $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ der für die absolute Convergenz der Reihe nothwendigen und hinreichenden Bedingung, dass für reelle x der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'}$ eine negative Form sei, unterworfen sein sollen, stellt eine einwerthige und für endliche v stetige Function der complexen Veränderlichen $v_1, \ldots, v_p$ dar, die den Gleichungen:

$$(1_0) \qquad \vartheta(v_1 \mid \ldots \mid v_\nu + \pi i \mid \ldots \mid v_p) = \vartheta(v_1 \mid \ldots \mid v_\nu \mid \ldots \mid v_p),$$

$$(2_0) \qquad \vartheta(v_1 + a_{1\nu} \mid \ldots \mid v_p + a_{p\nu}) = \vartheta(v_1 \mid \ldots \mid v_p) e^{-2v_\nu - a_{\nu\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

genügt. Erfüllt umgekehrt eine einwerthige und für endliche v stetige Function der complexen Veränderlichen $v_1, \ldots, v_p$ die Gleichungen (1), (2), so kann sie sich von der Function $\vartheta(v_1 \mid \ldots \mid v_p)$ nur um einen von den v freien Factor unterscheiden.

Die obige Function ist ein besonderer Fall der allgemeineren:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \dots \mid v_p)$$

$$= \sum_{m_1,\dots,m_p}^{-\infty,\dots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu + \frac{\alpha_\mu}{r}\right)\left(m_{\mu'} + \frac{\alpha_{\mu'}}{r}\right) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m_\mu + \frac{\alpha_\mu}{r}\right)\left(v_\mu + \frac{\alpha'_\mu}{r}\pi i\right)},$$

bei der r eine positive ganze Zahl, die α, α' ganze Zahlen bezeichnen. Die so definirte Function ist mit der ursprünglichen Function $\vartheta(v_1|\dots|v_p)$ verknüpft durch die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \dots \mid v_p)$$

$$= \vartheta\left(v_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\alpha_\mu}{r} a_{1\mu} + \frac{\alpha'_1}{r}\pi i \mid \dots \mid v_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\alpha_\mu}{r} a_{p\mu} + \frac{\alpha'_p}{r}\pi i\right)$$

$$\times e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\frac{\alpha_\mu\alpha_{\mu'}}{r^2} + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{\alpha_\mu}{r}\left(v_\mu + \frac{\alpha'_\mu}{r}\pi i\right)}$$

und geht, wenn die sämmtlichen Grössen α, α' den Werth Null annehmen, in dieselbe über, d. h. es ist:

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}(v_1 \mid \dots \mid v_p) = \vartheta(v_1 \mid \dots \mid v_p).$$

Ähnlich wie die ursprüngliche genügt die allgemeinere Function den Gleichungen:

$$(1) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \dots \mid v_\nu + \pi i \mid \dots \mid v_p)$$

$$= \vartheta\begin{bmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \dots \mid v_\nu \mid \dots \mid v_p)e^{\frac{2\alpha_\nu\pi i}{r}}, \quad (\nu=1,2,\dots,p)$$

$$(2) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{bmatrix}(v_1 + a_{1\nu} \mid \dots \mid v_p + a_{p\nu})$$

$$= \vartheta\begin{bmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \dots \mid v_p)e^{-2v_\nu - a_{\nu\nu} - \frac{2\alpha'_\nu\pi i}{r}},$$

welche sie zugleich bis auf einen von den Variablen $v_1, \ldots, v_p$ freien Factor bestimmen.

Der Zahlencomplex $\begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_p \\ a_1' & \ldots & a_p' \end{bmatrix}$ soll, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten ist, abgekürzt mit $\begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix}$ bezeichnet werden; ebenso möge es erlaubt sein, wenn die Ausdrücke für die Argumente einer Thetafunction sich nur durch untere Indices unterscheiden, hinter dem Functionszeichen nur den allgemeinen Ausdruck für die Argumente mit Weglassung des Index in doppelte Klammern eingeschlossen zu schreiben, also $\vartheta\begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix}(\!(v)\!)$ statt $\vartheta\begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix}(v_1 | \ldots | v_p)$; im Anschlusse daran möge dann das Grössensystem $v_1 | \ldots | v_p$ einfacher durch (v) bezeichnet werden. Bezeichnet man dann endlich noch das System:

$$v_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\beta_\mu}{r} a_{1\mu} + \frac{\beta_1'}{r} \pi i \,|\, \ldots \,|\, v_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\beta_\mu}{r} a_{p\mu} + \frac{\beta_p'}{r} \pi i,$$

wobei unter den β, β' ganze Zahlen zu verstehen sind, symbolisch mit $\left(v + \begin{vmatrix} \beta \\ \beta' \end{vmatrix}\right)$, so bestehen für irgend welche ganze Zahlen $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$ die beiden im Folgenden zur Anwendung kommenden Hülfsformeln:

$$\text{(A)} \quad \vartheta\begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix}\left(\!\!\left(v + \begin{vmatrix} \beta \\ \beta' \end{vmatrix}\right)\!\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} a + \beta \\ a' + \beta' \end{bmatrix}(\!(v)\!) e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\frac{\beta_\mu \beta_{\mu'}}{r^2} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{\beta_\mu}{r}\left(v_\mu + \frac{a'_\mu}{r}\pi i + \frac{\beta'_\mu}{r}\pi i\right)},$$

$$\text{(B)} \quad \vartheta\begin{bmatrix} a_1 + r\gamma_1 & \ldots & a_p + r\gamma_p \\ a_1' + r\gamma_1' & \ldots & a_p' + r\gamma_p' \end{bmatrix}(\!(v)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_p \\ a_1' & \ldots & a_p' \end{bmatrix}(\!(v)\!) e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} a_\mu \gamma'_\mu}.$$

2.

Mit $\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(\!(v)\!)$ werde ein Product von r Thetafunctionen von der Form:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(\!(v)\!) = \vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(\!(v + c^{(1)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(\!(v + c^{(2)})\!) \ldots \vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(\!(v + c^{(r)})\!)$$

bezeichnet, bei dem die c Constanten bedeuten, welche den p Bedingungen:

$$c_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2)} + \ldots + c_\mu^{(r)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

genügen. Ein solches Product soll ein Thetaproduct r^{ten} Grades genannt werden. Aus der Formel (B) des Art. 1 folgt sofort für jedes System ganzer Zahlen γ, γ' die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha_1 + r\gamma_1 \ldots \alpha_p + r\gamma_p\\ \alpha'_1 + r\gamma'_1 \ldots \alpha'_p + r\gamma'_p\end{bmatrix}(\!(v)\!) = \vartheta\begin{bmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_p\\ \alpha'_1 \ldots \alpha'_p\end{bmatrix}(\!(v)\!),$$

welche zeigt, dass im Ganzen r^{2p} verschiedene Functionen $\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(\!(v)\!)$ existiren; als Repräsentanten derselben können diejenigen angesehen werden, bei denen die α, α' sämmtlich Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ sind.

Der Zahlencomplex $\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_p\\ \alpha'_1 \ldots \alpha'_p\end{bmatrix}$ soll die Charakteristik des Thetaproductes genannt und im Folgenden kürzer mit $[\alpha]$ bezeichnet werden. Mit Rücksicht auf die letzte Formel denke man sich im Folgenden stets bei der Charakteristik $[\alpha]$ die sämmtlichen Zahlen α, α' durch ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r ersetzt; es gibt dann im Ganzen nur r^{2p} Charakteristiken, die aus $\begin{bmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_p\\ \alpha'_1 \ldots \alpha'_p\end{bmatrix}$ hervorgehen, wenn man an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_p$ der Reihe nach die sämmtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt. Die Charakteristik $\begin{bmatrix}0 \ldots 0\\ 0 \ldots 0\end{bmatrix}$ soll kurz mit $[0]$ bezeichnet werden. Unter der Summe zweier

Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$ soll jene Charakteristik $[\gamma] = [\alpha + \beta]$ verstanden werden, deren Elemente γ_μ, γ'_μ für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ durch die Congruenzen $\gamma_\mu \equiv \alpha_\mu + \beta_\mu \pmod{r}$, $\gamma'_\mu \equiv \alpha'_\mu + \beta'_\mu \pmod{r}$ bestimmt sind; ebenso unter der Differenz der Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$ jene Charakteristik $[\delta] = [\alpha - \beta]$, deren Elemente δ_μ, δ'_μ für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ durch die Congruenzen $\delta_\mu \equiv \alpha_\mu - \beta_\mu \pmod{r}$ $\delta'_\mu \equiv \alpha'_\mu - \beta'_\mu \pmod{r}$ bestimmt sind. Eine Charakteristik $[\beta]$, deren Elemente β_μ, β'_μ für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ durch die Congruenzen $\beta_\mu \equiv g\alpha_\mu \pmod{r}$, $\beta'_\mu \equiv g\alpha'_\mu \pmod{r}$, in denen g eine ganze Zahl ist, bestimmt sind, möge mit $[\beta] = [g\alpha]$ bezeichnet werden. Es möge endlich erlaubt sein, das frühere Symbol $\left(v + \left|\begin{matrix}\beta \\ \beta'\end{matrix}\right|\right)$ kürzer durch $(v + |\beta|)$ zu ersetzen. Für das Thetaproduct $\vartheta[\alpha]((v))$ besteht dann auf Grund der Formel (A) des Art. 1 die Gleichung:

$$\vartheta[\alpha]((v + |\beta|)) = \vartheta[\alpha + \beta]((v))\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \frac{\beta_\mu \beta_{\mu'}}{r} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \beta_\mu \left(v_\mu + \frac{\alpha'_\mu}{r}\pi i + \frac{\beta'_\mu}{r}\pi i\right)},$$

die im Folgenden wiederholt zur Anwendung gelangen wird.

3.

Es mögen mit $[\alpha^{(1)}], [\alpha^{(2)}], \ldots, [\alpha^{(q)}]$ q $(q \overline{\overline{<}} p)$ Charakteristiken von der Beschaffenheit bezeichnet werden, dass die Gleichung:

$$(1) \qquad [g_1\alpha^{(1)} + g_2\alpha^{(2)} + \ldots + g_q\alpha^{(q)}] = [0],$$

in der die g ganze Zahlen bedeuten, nur durch $g_1 \equiv g_2 \equiv \ldots \equiv g_q \equiv 0 \pmod{r}$ befriedigt werden kann, und dass weiter für jedes $\varkappa$ und λ von 1 bis q:

$$(2) \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\alpha_\mu^{(\varkappa)}\alpha_\mu'^{(\lambda)} - \alpha_\mu'^{(\varkappa)}\alpha_\mu^{(\lambda)}) \equiv 0 \pmod{r}$$

ist. Aus diesen Charakteristiken bilde man dann mit Hülfe ganzer Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_q$ die Charakteristik $[g_1\alpha^{(1)} + g_2\alpha^{(2)} + \ldots + g_q\alpha^{(q)}]$ und lasse darin an Stelle des Systems der q ganzen Zahlen g der Reihe nach die sämmtlichen r^q Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur q^{ten} Classe mit Wiederholung treten. Die r^q so entstehenden Charakteristiken

$[\alpha^{(0)}] = [0]$, $[\alpha^{(1)}]$, $[\alpha^{(2)}]$, ... , $[\alpha^{(r^q-1)}]$ sind dann alle von einander verschieden, und es besteht für irgend zwei unter ihnen die Congruenz (2).

Man definire nun r^q Grössen $w_{[\alpha^{(x)}]}$, $x = 0, 1, \ldots, r^q - 1$ folgendermassen:

1. Ist r ungerade,

so setze man für $x = 0, 1, \ldots, r^q - 1$:

$$w_{[\alpha^{(x)}]} = e^{\frac{r-1}{r}\pi i \sum_\mu a_\mu^{(x)} a_\mu'^{(x)}};$$

dabei ist, wie im Folgenden überall, im Exponenten $\sum_\mu$ zur Abkürzung statt $\sum_{\mu=1}^{\mu=p}$ gesetzt. Jede der so definirten Grössen bleibt dann, was zu ihrer Brauchbarkeit unumgänglich ist, ungeändert, wenn man die Zahlen a, a' um beliebige ganze Vielfache von r ändert; auch ist, wenn x, λ irgend zwei Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r^q - 1$ bezeichnen:

$$\begin{aligned} w_{[\alpha^{(x)} \pm \alpha^{(\lambda)}]} &= e^{\frac{r-1}{r}\pi i \sum_\mu \left(a_\mu^{(x)} \pm a_\mu^{(\lambda)}\right)\left(a_\mu'^{(x)} \pm a_\mu'^{(\lambda)}\right)} \\ &= w_{[\alpha^{(x)}]} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} e^{\pm \frac{r-1}{r}\pi i \sum_\mu \left(a_\mu^{(x)} a_\mu'^{(\lambda)} + a_\mu'^{(x)} a_\mu^{(\lambda)}\right)}, \end{aligned}$$

und man hat daher auf Grund der Congruenz (2) die Gleichung:

$$w_{[\alpha^{(x)} \pm \alpha^{(\lambda)}]} = w_{[\alpha^{(x)}]} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} e^{\mp \frac{2\pi i}{r} \sum_\mu a_\mu^{(x)} a_\mu'^{(\lambda)}}. \qquad (x, \lambda = 0, 1, \ldots, r^q - 1)$$

2. Ist r gerade,

so setze man $w_{[0]} = 1$, wähle $w_{[\alpha^{(1)}]}, w_{[\alpha^{(2)}]}, \ldots, w_{[\alpha^{(q)}]}$ nach Belieben so, dass:

$$w^2_{[\alpha^{(x)}]} = e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_\mu a_\mu^{(x)} a_\mu'^{(x)}} \qquad (x = 1, 2, \ldots, q)$$

ist, was auf 2^q Weisen geschehen kann, und definire die Grösse:

$$w_{[\alpha^{(x)} + \alpha^{(\lambda)} + \alpha^{(\nu)} + \ldots]},$$

bei der $x, \lambda, \nu, \ldots$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, q$ bezeichnen, die auch theilweise oder alle einander gleich sein können, durch die Gleichung:

$$w_{[\alpha^{(x)}+\alpha^{(\lambda)}+\alpha^{(\nu)}+\dots]} = w_{[\alpha^{(x)}]}w_{[\alpha^{(\lambda)}]}w_{[\alpha^{(\nu)}]}\dots e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu}\left(a_\mu^{(x)}a_\mu'^{(\lambda)}+a_\mu^{(x)}a_\mu'^{(\nu)}+a_\mu^{(\lambda)}a_\mu'^{(\nu)}+\dots\right)}.$$

Es ist dann wiederum für irgend zwei Zahlen x, λ aus der Reihe $0, 1, \dots, r^q - 1$:

$$w_{[\alpha^{(x)}\pm\alpha^{(\lambda)}]} = w_{[\alpha^{(x)}]}w_{[\alpha^{(\lambda)}]}e^{\mp\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu}a_\mu^{(x)}a_\mu'^{(\lambda)}}. \qquad (x,\lambda=0,1,\dots,r^q-1)$$

Man nehme nun an, dass zwischen den r^q Thetaproducten r^{ten} Grades $\theta[\eta+\alpha^{(x)}]((v))$, $x = 0, 1, \dots, r^q - 1$, bei denen $[\eta]$ irgend eine Charakteristik bezeichnet, eine lineare Relation:

$$\sum_{x=0}^{x=r^q-1} c_x\theta[\eta+\alpha^{(x)}]((v)) = 0 \tag{3}$$

bestehe, in der die c von v unabhängige Grössen bezeichnen, die nicht alle den Werth Null besitzen. Lässt man dann das Variablensystem (v) in das System $(v + |\alpha^{(x')}|)$ übergehen, indem man unter x' irgend eine Zahl aus der Reihe $0, 1, \dots, r^q - 1$ versteht, so geht aus der Gleichung (3) die neue:

$$\sum_{x=0}^{x=r^q-1} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu}a_\mu^{(x')}a_\mu'^{(x)}} c_x\theta[\eta+\alpha^{(x)}+\alpha^{(x')}]((v)) = 0 \tag{4}$$

hervor, und aus dieser entsteht, wenn man mit $[\varepsilon]$ irgend eine Charakteristik bezeichnet, linke und rechte Seite mit:

$$w_{[\alpha^{(x')}]}e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu}\left(a_\mu^{(x')}\varepsilon_\mu'-a_\mu'^{(x')}\varepsilon_\mu\right)}$$

multiplicirt und nach x' von 0 bis $r^q - 1$ summirt, die Gleichung:

$$\sum_{x=0}^{x=r^q-1}\sum_{x'=0}^{x'=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu}\left(a_\mu^{(x')}\varepsilon_\mu'-a_\mu'^{(x')}\varepsilon_\mu\right)} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu}a_\mu^{(x')}a_\mu'^{(x)}} w_{[\alpha^{(x')}]}c_x\theta[\eta+\alpha^{(x)}+\alpha^{(x')}]((v)) = 0. \tag{5}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung führe man nun an Stelle des

Summationsbuchstabens $\varkappa'$ einen neuen Summationsbuchstaben λ ein, indem man:

$$[\alpha^{(\varkappa')}] = [\alpha^{(\lambda)} - \alpha^{(\nu)}]$$

setzt und dabei unter ν eine Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots, r^q - 1$ versteht, über die sogleich verfügt werden wird. Bei der Ausführung der Summation nach $\varkappa'$ durchläuft dann auch λ die Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, r^q - 1$ nur in anderer Reihenfolge, und man erhält, wenn man schliesslich noch $\nu = \varkappa$ setzt und beachtet, dass:

$$w_{[\alpha^{(\lambda)}-\alpha^{(\varkappa)}]} = w_{[\alpha^{(\lambda)}]} w_{[\alpha^{(\varkappa)}]} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu a_\mu^{(\lambda)} a_\mu'^{(\varkappa)}}$$

ist, aus (5) die Gleichung:

$$(6)\qquad \left(\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=r^q-1} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu\left(a_\mu^{(\varkappa)}\varepsilon_\mu' - a_\mu'^{(\varkappa)}\varepsilon_\mu\right)} \frac{1}{w_{[\alpha^{(\varkappa)}]}} c_\varkappa\right)$$

$$\times\left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu\left(a_\mu^{(\lambda)}\varepsilon_\mu' - a_\mu'^{(\lambda)}\varepsilon_\mu\right)} w_{[\alpha^{(\lambda)}]}\,\theta[\eta + \alpha^{(\lambda)}]((v))\right) = 0.$$

Für jede der r^{2p} Charakteristiken, die man an Stelle von $[\varepsilon]$ setzen kann, muss daher, sobald nicht der erste der beiden die linke Seite der Gleichung (6) bildenden Factoren verschwindet, der zweite Null sein. Da nun aber aus dem Verschwinden aller ersten Factoren das Verschwinden der sämmtlichen Grössen c folgen würde, und dies ausgeschlossen ist, so ergibt sich als Resultat der bisherigen Untersuchung, dass immer, wenn zwischen den r^q Thetaproducten r^{ten} Grades $\theta[\eta+\alpha^{(\varkappa)}]((v))$, $\varkappa = 0, 1, \ldots, r^q - 1$, überhaupt eine lineare Relation (3) besteht, dann zwischen ihnen auch mindestens eine, im Allgemeinen aber mehrere lineare Relationen von der speciellen Form:

$$(7)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu\left(a_\mu^{(\lambda)}\varepsilon_\mu' - a_\mu'^{(\lambda)}\varepsilon_\mu\right)} w_{[\alpha^{(\lambda)}]}\,\theta[\eta + \alpha^{(\lambda)}]((v)) = 0$$

existiren. Das Bestehen dieser Relationen (7) ist dann aber auch eine

zum Bestehen der Relation (3) hinreichende Bedingung, da sich die linke Seite der Gleichung (3) aus den linken Seiten der Gleichungen (7) auf Grund der Gleichung:

$$(8)\qquad \sum_{x=1}^{x=r^q-1} c_x \theta[\eta + \alpha^{(x)}]((v))$$

$$= \frac{1}{r^{2p}} \sum_{[\varepsilon]} \left\{ \begin{array}{c} \left(\sum\limits_{x=0}^{x=r^q-1} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum\limits_{\mu} (\alpha_\mu^{(x)} \varepsilon'_\mu - \alpha'^{(x)}_\mu \varepsilon_\mu)} \frac{1}{w_{[\alpha^{(x)}]}} c_x \right) \\ \times \left(\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum\limits_{\mu} (\alpha_\mu^{(\lambda)} \varepsilon'_\mu - \alpha'^{(\lambda)}_\mu \varepsilon_\mu)} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} \theta[\eta + \alpha^{(\lambda)}]((v)) \right) \end{array} \right\},$$

in der die Summation so auszuführen ist, dass $[\varepsilon]$ die Reihe der r^{2p} Charakteristiken durchläuft, zusammensetzen lässt.

4.

Es seien wiederum mit $[\alpha^{(1)}], \ldots, [\alpha^{(q)}]$ q $(q < p)$ Charakteristiken von der Beschaffenheit bezeichnet, dass die Gleichung:

$$(1)\qquad [g_1 \alpha^{(1)} + \ldots + g_q \alpha^{(q)}] = [0],$$

in der die g ganze Zahlen bedeuten, nur durch $g_1 \equiv \ldots \equiv g_q \equiv 0 \pmod{r}$ befriedigt werden kann, und dass für jedes x und λ von 1 bis q:

$$(2)\qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\alpha_\mu^{(x)} \alpha'^{(\lambda)}_\mu - \alpha'^{(x)}_\mu \alpha_\mu^{(\lambda)}) \equiv 0 \pmod{r}$$

ist, und es seien $[\alpha^{(0)}] = [0], [\alpha^{(1)}], \ldots, [\alpha^{(r^q-1)}]$ jene r^q verschiedenen Charakteristiken, die aus $[g_1 \alpha^{(1)} + \ldots + g_q \alpha^{(q)}]$ hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Systems der q Buchstaben $g_1, \ldots, g_q$ der Reihe nach die sämmtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur q^{ten} Classe mit Wiederholung treten lässt. Es seien ferner mit $[\beta^{(1)}], \ldots, [\beta^{(q')}]$ q' $(q + q' \overline{\overline{<}}\, p)$ Charakteristiken von der Beschaffenheit bezeichnet, dass die Gleichung:

$$(1')\qquad [h_1 \beta^{(1)} + \ldots + h_{q'} \beta^{(q')}] = [0],$$

in der die h ganze Zahlen bedeuten, nur durch $h_1 \equiv \ldots \equiv h_{q'} \equiv 0 \pmod{r}$ befriedigt werden kann, und dass für jedes ρ von 1 bis q' die Congruenz:

$$(2') \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\beta_\mu^{(\rho)} \alpha_\mu'^{(x)} - \beta_\mu'^{(\rho)} \alpha_\mu^{(x)}) \equiv 0 \pmod{r}$$

nicht für alle Werthe von x besteht, und es seien $[\beta^{(0)}] = [0], [\beta^{(1)}], \ldots, [\beta^{(r^{q'}-1)}]$ jene $r^{q'}$ verschiedenen Charakteristiken, die aus:

$$[h_1\beta^{(1)} + \ldots + h_{q'}\beta^{(q')}]$$

hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Systems der q' Buchstaben $h_1, \ldots, h_{q'}$ der Reihe nach die sämmtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur q'^{ten} Classe mit Wiederholung treten lässt. Lässt man dann in der Charakteristik $[\alpha^{(x)} + \beta^{(\rho)}]$ x die Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, r^q - 1$ und unabhängig davon ρ die Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, r^{q'} - 1$ durchlaufen, so gehen aus $[\alpha^{(x)} + \beta^{(\rho)}]$ $r^{q+q'}$ Charakteristiken hervor, von denen keine zwei einander gleich sind.

Man nehme nun an, dass zwischen den $r^{q+q'}$ Thetaproducten r^{ten} Grades $\theta[\eta + \alpha^{(x)} + \beta^{(\rho)}]((v))$, $x = 0, 1, \ldots, r^q - 1$, $\rho = 0, 1, \ldots, r^{q'} - 1$, bei denen $[\eta]$ irgend eine Charakteristik bezeichnet, eine lineare Relation:

$$(3) \qquad \sum_{x=0}^{x=r^q-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} c_{x\rho}\theta[\eta + \alpha^{(x)} + \beta^{(\rho)}]((v)) = 0$$

bestehe, in der die c von v unabhängige Grössen bezeichnen, die nicht alle den Werth Null besitzen. Lässt man dann das Variablensystem (v) in das System $(v + |\alpha^{(x')}|)$ übergehen, indem man unter x' irgend eine Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots, r^{q'} - 1$ versteht, so geht aus der Gleichung (3) die neue:

$$(4) \qquad \sum_{x=0}^{x=r^q-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu \alpha_\mu^{(x')}(\alpha_\mu'^{(x)} + \beta_\mu'^{(\rho)})} c_{x\rho}\theta[\eta + \alpha^{(x)} + \alpha^{(x')} + \beta^{(\rho)}]((v)) = 0$$

hervor, und aus dieser entsteht, wenn man unter $[\varepsilon]$ irgend eine Charakteristik und unter $w_{[\alpha^{(x')}]}$ die nämliche Grösse wie im vorigen Artikel versteht, linke und rechte Seite mit:

$$w_{[\alpha^{(x')}]} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu (\alpha_\mu^{(x')}\varepsilon_\mu' - \alpha_\mu'^{(x')}\varepsilon_\mu)}$$

multiplicirt und nach $\varkappa'$ von o bis $r^q - 1$ summirt, die Gleichung:

$$(5)\quad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=r^q-1}\sum_{\varkappa'=0}^{\varkappa'=r^q-1}\sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu\left(a_\mu^{(\varkappa')}\varepsilon'_\mu - a'^{(\varkappa')}_\mu\varepsilon_\mu\right)} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu a_\mu^{(\varkappa')}\left(a'^{(\varkappa)}_\mu + \beta'^{(\rho)}_\mu\right)} w_{[\alpha^{(\varkappa')}]}\, c_{\varkappa\rho}\, \vartheta[\eta + \alpha^{(\varkappa)} + \alpha^{(\varkappa')} + \beta^{(\rho)}]((v))$$
$$= 0.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung führe man nun an Stelle des Summationsbuchstabens $\varkappa'$ einen neuen Summationsbuchstaben λ ein, indem man:

$$[\alpha^{(\varkappa')}] = [\alpha^{(\lambda)} - \alpha^{(\nu)}]$$

setzt und dabei unter ν eine Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots, r^q - 1$ versteht, über die sogleich verfügt werden wird. Bei der Ausführung der Summation nach $\varkappa'$ durchläuft dann auch λ die Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, r^q - 1$ nur in anderer Reihenfolge, und man erhält, wenn man schliesslich noch $\nu = \varkappa$ setzt und beachtet, dass:

$$w_{[\alpha^{(\lambda)} - \alpha^{(\varkappa)}]} = w_{[\alpha^{(\lambda)}]}\, w_{[\alpha^{(\varkappa)}]}\, e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu a_\mu^{(\lambda)} a'^{(\varkappa)}_\mu}$$

ist, aus (5) die Gleichung

$$(6)\quad \sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} C_\rho^{[\varepsilon]}\left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu\left(a_\mu^{(\lambda)}\varepsilon'_\mu - a'^{(\lambda)}_\mu\varepsilon_\mu\right)} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu a_\mu^{(\lambda)}\beta'^{(\rho)}_\mu} w_{[\alpha^{(\lambda)}]}\, \vartheta[\eta + \alpha^{(\lambda)} + \beta^{(\rho)}]((v))\right)$$
$$= 0,$$

bei der zur Abkürzung:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=r^q-1} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu\left(a_\mu^{(\varkappa)}\varepsilon'_\mu - a'^{(\varkappa)}_\mu\varepsilon_\mu\right)} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_\mu a_\mu^{(\varkappa)}\beta'^{(\rho)}_\mu}\, \frac{1}{w_{[\alpha^{(\varkappa)}]}}\, c_{\varkappa\rho} = C_\rho^{[\varepsilon]}$$

gesetzt ist.

Aus dem Bestehen der Gleichung (3) folgt das Bestehen der Gleichung (6) für eine beliebige Charakteristik $[\varepsilon]$. Würden nun für jede der r^{2p} Charakteristiken, die man an Stelle von $[\varepsilon]$ setzen kann, die sämmtlichen Grössen $C_\rho^{[\varepsilon]}$ $(\rho = 0, 1, \ldots, r^{q'} - 1)$ den Werth Null besitzen, so würde dies auch das Verschwinden der sämmtlichen Grössen c nach sich ziehen, und da dies ausgeschlossen ist, so ergibt sich als Resultat der vorstehenden Untersuchung, dass immer, wenn zwischen den

$r^{q+q'}$ Thetaproducten r^{ten} Grades $\vartheta[\eta + \alpha^{(\varkappa)} + \beta^{(\rho)}]((v))$ $\left(\begin{smallmatrix}\varkappa=0,1,\ldots,r^q-1\\ \rho=0,1,\ldots,r^{q'}-1\end{smallmatrix}\right)$ überhaupt eine lineare Relation (3) besteht, dann zwischen ihnen auch mindestens eine, im Allgemeinen aber mehrere lineare Relationen von der specielleren Form:

$$(7)\quad \sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} C_\rho^{[\varepsilon]}\left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_\mu\left(a_\mu^{(\lambda)}\varepsilon'_\mu - a'^{(\lambda)}_\mu\varepsilon_\mu\right)} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_\mu a_\mu^{(\lambda)}\beta'^{(\rho)}_\mu} w_{[\alpha^{(\lambda)}]}\,\vartheta[\eta+\alpha^{(\lambda)}+\beta^{(\rho)}]((v))\right) = 0$$

existiren. Das Bestehen dieser Relationen (7) ist dann aber auch eine zum Bestehen der Relation (3) hinreichende Bedingung, da sich die linke Seite der Gleichung (3) aus den linken Seiten der Gleichungen (7) auf Grund der Gleichung:

$$(8)\quad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=r^q-1}\sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} c_{\varkappa\rho}\,\vartheta[\eta + \alpha^{(\varkappa)} + \beta^{(\rho)}]((v))$$

$$= \frac{1}{r^{2p}}\sum_{[\varepsilon]}\sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1}\left\{\begin{array}{c}\left(\sum\limits_{\varkappa=0}^{\varkappa=r^q-1} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_\mu\left(a_\mu^{(\varkappa)}\varepsilon'_\mu - a'^{(\varkappa)}_\mu\varepsilon_\mu\right)} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_\mu a_\mu^{(\varkappa)}\beta'^{(\rho)}_\mu}\frac{1}{w_{[\alpha^{(\varkappa)}]}}c_{\varkappa\rho}\right)\\ \times\left(\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_\mu\left(a_\mu^{(\lambda)}\varepsilon'_\mu - a'^{(\lambda)}_\mu\varepsilon_\mu\right)} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_\mu a_\mu^{(\lambda)}\beta'^{(\rho)}_\mu} w_{[\alpha^{(\lambda)}]}\,\vartheta[\eta+\alpha^{(\lambda)}+\beta^{(\rho)}]((v))\right)\end{array}\right\},$$

in der die Summation so auszuführen ist, dass $[\varepsilon]$ die Reihe der r^{2p} Charakteristiken durchläuft, zusammensetzen lässt.

Lässt man endlich in der Gleichung (7) das Variablensystem (v) in das System $(v - |\beta^{(\sigma)}|)$ übergehen, indem man unter σ irgend eine Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots, r^{q'} - 1$ versteht, so geht aus derselben die Gleichung:

$$(9)\quad \sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} C_\rho^{[\varepsilon]}\left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_\mu\left(a_\mu^{(\lambda)}\varepsilon'_\mu - a'^{(\lambda)}_\mu\varepsilon_\mu\right)} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_\mu\left(a_\mu^{(\lambda)}\beta'^{(\rho)}_\mu - \beta_\mu^{(\sigma)}a'^{(\lambda)}_\mu - \beta_\mu^{(\sigma)}\beta'^{(\rho)}_\mu\right)} w_{[\alpha^{(\lambda)}]}\,\vartheta[\eta+\alpha^{(\lambda)}+\beta^{(\rho)}-\beta^{(\sigma)}]((v))\right) = 0$$

hervor. Besitzen nun für irgend eine Charakteristik $[\varepsilon]$ nicht die sämmtlichen Grössen $C_\rho^{[\varepsilon]}$ den Werth Null, so folgt aus dem Bestehen der $r^{q'}$ Gleichungen, die aus der Gleichung (9) hervorgehen, wenn man σ die Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, r^{q'} - 1$ durchlaufen lässt, das Verschwinden der Determinante:

$$(10)\quad \left| \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu}\left(a_\mu^{(\lambda)}\varepsilon'_\mu - a'^{(\lambda)}_\mu \varepsilon_\mu\right)} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu}\left(a_\mu^{(\lambda)}\beta'^{(\rho)}_\mu - \beta^{(\sigma)}_\mu a'^{(\lambda)}_\mu - \beta^{(\sigma)}_\mu \beta'^{(\rho)}_\mu\right)} w_{[\alpha^{(\lambda)}]}\,\theta[\eta+\alpha^{(\lambda)}+\beta^{(\rho)}-\beta^{(\sigma)}]((v)) \right|$$
$$\rho\,,\,\sigma = 0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,r^{q'}-1\,,$$

und man kann daher das oben gefundene Resultat auch so aussprechen, dass immer, wenn zwischen den $r^{q+q'}$ Thetaproducten r^{ten} Grades:

$$\theta[\eta+\alpha^{(\varkappa)}+\beta^{(\rho)}]((v)) \qquad \begin{pmatrix}\varkappa=0,1,\ldots,r^q-1\\ \rho=0,1,\ldots,r^{q'}-1\end{pmatrix}$$

eine lineare Relation besteht, dann mindestens eine der Determinanten $r^{q'\,\text{ten}}$ Grades (10) verschwindet.

Strassburg, den 9. December 1891.

REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler

PAR

E. PICARD

à PARIS.

J'ai eu déjà plusieurs fois l'occasion d'insister sur la profonde différence qui se présente dans l'étude de certains problèmes entre les équations du premier ordre et les équations d'ordre supérieur (voir en particulier le chapitre V de mon mémoire de 1888 *sur les fonctions algébriques de deux variables*).

Cette différence capitale tient en réalité à la circonstance suivante. Appelons *singularité essentielle* d'une intégrale d'une équation différentielle tout point singulier qui n'est pas un pôle ou un point critique algébrique; soit maintenant une équation différentielle algébrique du premier ordre

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

f étant un polynôme. On peut démontrer que *les singularités essentielles des intégrales de cette équation sont fixes, c'est à dire ne dépendent pas de la constante d'intégration.* Il est juste d'attribuer ce théorème à M. PAINLEVÉ qui l'a indiqué, sous une forme seulement un peu différente, dans son mémoire *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (Annales de la Faculté de Toulouse (1888), page 38).

Je remarque maintenant que le théorème précédent ne s'étend pas aux équations d'ordre supérieur au premier. Ainsi, pour une équation différentielle algébrique

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

les singularités essentielles seront en général mobiles. Il suffira de prendre comme exemple l'équation

$$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2 + 4y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

dont l'intégrale générale est

$$y = Ce^{\frac{1}{x-C'}}$$

et où les singularités essentielles dépendent de C'.

Vous savez que les équations différentielles du premier ordre, *à points critiques fixes* ont fait l'objet des recherches de M. Fuchs et de M. Poincaré. Il n'y a dans ce cas aucune difficulté à reconnaître sur l'équation différentielle si les points critiques sont fixes; la véritable raison en est dans le théorème de M. Painlevé: il suffit de s'assurer, ce qui est facile, qu'un point arbitraire du plan ne peut pas être un point critique algébrique pour une intégrale. Il en est tout autrement pour les équations d'ordre supérieur; il est encore facile dans ce cas de reconnaître qu'un point arbitraire ne peut pas être un point critique algébrique pour une intégrale, mais, dans cette hypothèse, l'intégrale générale n'aura pas nécessairement ses points critiques fixes, car il peut y avoir des singularités essentielles mobiles. On peut d'ailleurs aller un peu plus loin en ne se bornant pas aux conditions qui excluent les points critiques algébriques, et reconnaître en général sur l'équation différentielle si toute intégrale prenant en un point arbitraire ainsi que ses dérivées des valeurs déterminées (finies ou infinies) est uniforme autour de ce point. Quand ces diverses conditions sont remplies, on peut dire que l'intégrale générale *a l'apparence* d'une intégrale à points critiques fixes, mais il n'est pas permis d'affirmer qu'elle a réellement ses points critiques fixes, c'est à dire qu'en dehors de certains point fixes elle est toujours uniforme.

En particulier, si l'équation différentielle ne renferme pas la variable indépendante, nous avons les conditions pour que l'intégrale générale soit *à apparence uniforme* suivant une dénomination que j'ai employée il y a déjà longtemps. Ces conditions sont de nature *algébrique;* il arrivera au contraire, en général, que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale générale soit réellement uniforme sont de nature *transcendante.*

Deux exemples éclairciront suffisamment, je crois, les généralités qui précèdent. La relation

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \log(x + C) + C'$$

où $R(y)$ est un polynôme du quatrième degré en y, définit une fonction y de x satisfaisant, quelles que soient les constantes C et C', a une équation différentielle facile à former

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est à apparence uniforme; elle aura un point singulier à distance finie et elle ne sera véritablement uniforme que si l'intégrale elliptique admet $2\pi i$ pour période, ce qui s'exprimera par une relation transcendante entre les coefficients de l'équation. Considérons, en second lieu, l'équation linéaire à coefficients rationnels

$$\frac{d^2\omega}{dy^2} + p\frac{d\omega}{dy} + q\omega = 0 \tag{E}$$

dont les points singuliers, y compris le point à l'infini, sont supposés réguliers. En désignant par ω_1 et ω_2 deux intégrales distinctes, on sait que si l'on pose

$$\frac{\omega_2(y)}{\omega_1(y)} = x$$

la fonction y de x satisfait à une équation différentielle algébrique du troisième ordre:

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0. \tag{1}$$

Si la différence des racines de l'équation fondamentale est, pour tout point critique de (E), une partie aliquote de l'unité, l'intégrale générale de (1) sera à apparence uniforme, mais, comme le montre la théorie des fonctions fuchsiennes, elle ne sera pas en géneral une fonction uniforme.

Permettez-moi de vous indiquer encore un exemple d'une équation où la variable figure explicitement. J'envisage l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy^3 + Ry^2 + Sy + T = 0 \tag{2}$$

où les coefficients sont des fonctions uniformes de x et où nous supposerons que Q n'est pas identiquement nulle. L'intégrale générale aura

l'apparence d'une fonction à points critiques fixes si les deux séries d'intégrales devenant infinies en un point arbitraire x_0 admettent ce point pour pôle. Cette condition entraînera deux identités entre les fonctions P, Q, R, S, T et leurs dérivées jusqu'au quatrième ordre. On obtiendra ces identités de la manière suivante. Soit

$$y = \frac{\alpha}{x - x_0} + \beta + \gamma(x - x_0) + \delta(x - x_0)^2 + \varepsilon(x - x_0)^3 + \dots$$

une intégrale de (2) admettant le pôle x_0. En substituant cette expression dans l'équation différentielle, on détermine les coefficients

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta,$$

mais dans l'équation qui devrait donner ε, cette lettre disparaît; on a alors une relation entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et le coefficient ε reste arbitraire. Comme α est donné par une équation du second degré, on a les deux identités cherchées entre P, Q, R, S, T et leurs dérivées, puisque x_0 est arbitraire. Ces conditions ne suffisent pas bien probablement pour que l'intégrale générale de (2) soit réellement à points critiques fixes.

Dans son beau Mémoire sur la rotation d'un corps solide, M^me^ de Kowalevski fait quelque chose d'analogue à ce que je viens de faire plus haut. En réalité, elle ne trouve que des conditions pour que les intégrales soient à apparence uniforme, et c'est seulement après l'intégration effectuée qu'on peut affirmer que les intégrales sont uniformes. Je me propose de revenir un jour sur le travail de M^me^ de Kowalevski, en appliquant à son problème les méthodes générales de mon Mémoire sur les fonctions algébriques de plusieurs variables; le développement des calculs se fera, je crois, d'une manière plus simple et moins artificielle.

Ces remarques, peut être trop rapides, mais que je compte développer en détail dans le tome troisième de mon Traité d'analyse, ne sont pas en définitive très encourageantes. Il est peu probable que les équations d'ordre supérieur à points critiques fixes puissent conduire à l'étude de transcendantes nouvelles, en laissant bien entendu de côté les équations linéaires. J'espère beaucoup plus de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles, dont je vous entretenais naguère, et que j'ai sommairement indiqués dans une Note des Comptes Rendus (*Sur des fonctions d'une variable dépendant de deux constantes réelles arbitraires,* juin 1892).

RAPPORT SUR QUELQUES CALCULS ENTREPRIS PAR M. BERTELSEN ET CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS

PAR

J.-P. GRAM

À COPENHAGUE.

Comme on sait, nous possédons des tables des diviseurs comprenant les nombres des neuf premiers millions. Pour les trois premiers millions ces tables ont été calculées par BURCKHARDT,[1] pour les trois suivants par M. J. GLAISHER[2] et pour les trois derniers par DASE.[3] Lesdites tables donnent immédiatement pour chaque nombre composé non divisible par 2, 3, 5 le plus petit nombre premier qui le divise; les nombres premiers eux-mêmes sont désignés par un —. Dans l'introduction à la table du sixième million, M. GLAISHER a, en outre, communiqué les résultats de l'énumération très soigneuse des nombres qui dans les tables sont indiquées comme premiers, et il a comparé ces résultats avec ceux qu'on trouve en calculant la totalité des nombres premiers jusqu'à une limite donnée au moyen de différentes formules approximatives. Par cette comparaison on trouve en général une assez bonne concordance entre les énumérations et les calculs faits d'après la formule approximative de RIEMANN. Celle-ci devant être supposée représenter la fonction en question

---

[1] J. CH. BURCKHARDT: *Table des diviseurs pour tous les nombres des 1er, 2e et 3e million.* Paris 1817. (1814—1817.)

[2] JAMES GLAISHER: *Factor Table for the fourth, fifth, sixth Million.* London 1879, 1880, 1883.

[3] ZACHARIAS DASE: *Factoren-Tafeln für alle Zahlen der siebenten, achten, neunten Million.* Hamburg 1862, 1863, 1865.

aussi exactement qu'il est possible de le faire par une formule approximative continue de ce genre, on avait le droit de conclure que les tables des diviseurs étaient essentiellement correctes.

Néanmoins on sait depuis longtemps que les tables ne sont pas sans fautes. A la vérité, M. MEISSEL[1] a trouvé par un calcul direct la totalité des nombres premiers dans chaque myriade jusqu'à 1 million concordant avec le résultat donné par les énumérations dans les tables, mais dans le 2e million plusieurs erreurs isolées ont été trouvées, tant par M. MEISSEL que par d'autres auteurs. Malheureusement, on ne possède pas une table des diviseurs pour le 10e million, et le nombre $\theta(10^7)$ — je dénote par le symbole $\theta(n)$ la totalité des nombres premiers jusqu'à la limite n — calculé par M. MEISSEL ne saurait donc être appliqué pour contrôler les énumérations. Toutefois le fait que l'écart entre les valeurs de $\theta(10^7)$ trouvées par l'énumération et par la formule de RIEMANN était $+ 87$, tandis que l'écart correspondant pour 9.10^6 fut $- 132$, indiqua qu'il y avait probablement plusieurs erreurs. Un examen attentif des déviations entre les résultats de M. GLAISHER et ceux que donne la formule de RIEMANN pour chaque centaine de mille dans le 9e million, m'avait depuis plusieurs années conduit à la conviction qu'il se trouvait dans ce million une série d'erreurs, notablement que plusieurs nombres composés étaient marqués comme nombres premiers.[2]

Poussé par ces considérations, j'avais plusieurs fois songé à entreprendre moi-même le calcul de $\theta(9.10^6)$, mais la difficulté d'achever sans erreurs un calcul si long et si fatigant m'avait toujours découragé. Le vif intérêt que toutes les recherches concernant les nombres premiers ont excité parmi les géomètres durant ces dernières années, rendait cependant ledit calcul de jour en jour plus désirable.

Ce fut donc une heureuse circonstance qu'un jeune homme M. N.-P. BERTELSEN, calculateur dont l'habileté n'est comparable qu'avec celle d'un DASE et qui possède en outre les connaissances mathématiques nécessaires, ait bien voulu entreprendre un calcul de $\theta(9.10^6)$ d'après la

---

[1] *Über die Bestimmung der Primzahlenmenge innerhalb gegebener Grenzen.* Mathematische Annalen, T. 2, p. 636—642, cfr. T. 3, p. 523, T. 21, p. 304, T. 25, p. 251.

[2] L. LORENZ: *Analytiske Undersogelser over Primtalmængderne.* Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. 6te Række V, 4, p. 450.

méthode de M. Meissel. M. Bertelsen commença l'oeuvre durant l'été de 1891 et il a consacré à des calculs décrits ci-dessous une grande partie de ses loisirs pendant l'année suivante. Un résumé succinct de son travail fut présenté par moi dans le 14^e^ Congrès des naturalistes scandinaves, qui eut lieu à Copenhague en juillet 1892.

Le calcul de $\theta(9.10^6)$ donna aussitôt le résultat prévu que les tables des diviseurs indiquent des nombres premiers en excès. L'erreur totale s'éleva à 78 unités, la valeur correcte de $\theta(9.10^6)$ étant 602489 au lieu de 602567 d'après M. Glaisher, le nombre 1 n'étant pas compté comme premier. L'écart de Riemann fut par là réduit à 54 unités seulement.

L'erreur totale est relativement assez insignifiante et semble témoigner avantageusement du degré de l'exactitude apportée tant à dresser de si vastes tables qu'à effectuer les énumérations. Cependant, il était désirable d'avoir les erreurs mieux localisées, et, dans ce but M. Bertelsen entreprit le calcul de θ pour chaque million jusqu'à 10 millions.

Ce nouveau calcul fit constater en premier lieu que les résultats obtenus par M. Meissel pour $\theta(10^6)$ et $\theta(10^7)$ étaient parfaitement corrects; qu'ensuite il y avait dans les tables des 2, 3, 4 et 5^e^ millions des erreurs probablement peu nombreuses, que les 6 et 7^e^ millions peuvent être sans faute, mais que, dans le 8^e^ et surtout dans le 9^e^, il doit y avoir de fortes erreurs.

Mais M. Bertelsen ne se contentait pas de ces résultats. Avec une assiduité qui doit exciter la véritable admiration de tous ceux qui comprennent combien un pareil travail est pénible et fatigant, il se mit à chercher ces erreurs dans les tables mêmes en commençant par le 9^e^ million et examinant tout d'abord si quelques-uns des nombres indiqués comme premiers étaient réellement des composés.

Cela nécessita une localisation ultérieure des erreurs, et après avoir calculé θ pour des intervalles de 100000 et même des plus petits, on arriva au résultat surprenant que, dans le 9^e^ million, presque tous les multiples du nombre premier 2617 sont signalés comme des nombres premiers. Tel est encore le cas pour divers multiples d'autres nombres premiers, par exemple 13 et 181.

Ces découvertes imprévues encouragèrent à de nouveaux efforts. Au moyen d'un système de tables auxiliaires et d'autres artifices que M. Bertelsen se construisit peu à peu, il calcula successivement un grand

nombre de valeurs distinctes de $\theta(n)$ avec des intervalles de 100000, 50000 et même, en certains endroits, de 25000 ou moindres encore. Cela fait, il a entrepris une recherche minutieuse des erreurs dont l'existence dans chaque intervalle était révélée par le calcul, et le résultat de ces recherches se trouve dans la table I, qui donne une liste de toutes les erreurs connues jusqu'ici dans les tables des diviseurs. Quelques-unes de ces erreurs sont de purs errata, d'autres sont dues sans doute à un déplacement du crible, d'autres encore sont des fautes de calcul ou de transcription.

On trouvera dans la liste des erreurs quelques brièves indications à cet égard; le signe *Pr.* dénote que le nombre posé est premier, un astérisque signifie que l'erreur a été signalée auparavant. La liste contient non seulement des erreurs concernant les premiers, mais d'autres encore, par exemple de fausses indications des plus petits diviseurs. Voici pour les divers millions les nombres respectifs de fautes connues:

Million	1e	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e
Erreurs	1	23	15	1	2	0	0	40	59.

Tandis qu'à l'exception du 1er million, où l'on n'a trouvé qu'une faute (signalée par Dase), les tables de Burckhardt contiennent d'assez nombreuses erreurs; les tables de M. Glaisher ne sont fautives qu'en trois points, et le 6e million en semble totalement exempt, preuve du grand soin avec lequel le travail a été exécuté. Tel est aussi le cas du 1er million de Dase, tandis que les deux derniers millions traités par ce calculateur sont moins bien réussis, mais l'on doit se rappeler que l'achèvement de ce grand oeuvre par lui-même a été empêché par la mort.

La liste suivante n'a pas la prétention d'être absolument complète, les tables n'ayant point été examinées avec le même soin dans toutes leurs parties; le but principal n'était pas même de trouver toutes les erreurs commises, ce qui est impossible sans refaire le calcul des tables. Néanmoins on peut compter qu'il n'y reste que très peu de ces erreurs, surtout dans l'indication des nombres premiers. Pour en comprendre la raison, il faut considérer la méthode suivie par M. Bertelsen pour les chercher systématiquement.

Avant d'expliquer ce procédé je dois rappeler succinctement la méthode de M. Meissel.

Soit m la limite pour laquelle on va calculer $\theta(m)$, la totalité des nombres premiers inférieurs. Désignons par p_n le nombre premier n^e et par

$$\Phi(m, n) = m - \sum E\frac{m}{a} + \sum E\frac{m}{ab} - \sum E\frac{m}{abc} + \dots$$

la totalité des nombres $\overline{\overline{<}}\, m$ qui ne sont divisibles par aucun des nombres $a, b, c, \dots$, représentant les n plus petits nombres premiers. En appliquant dans les dénominateurs tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{m}$, ladite formule donne, comme on le sait, $1 +$ la totalité des nombres premiers qui sont compris entre les limites $\sqrt{m}$ et m. On a donc

$$\Phi(m, \theta(\sqrt{m})) = 1 + \theta(m) - \theta(\sqrt{m}).$$

D'ailleurs on trouve facilement la formule de réduction suivante

$$\Phi(m, n) = \Phi(m, n-1) - \Phi\left(E\frac{m}{p_n}, n-1\right),$$

dont l'application devient plus commode en remarquant, comme l'a fait M. Meissel, qu'on peut trouver une expression simple pour la différence

$$\Phi(m, \theta(\sqrt[3]{m})) - \Phi(m, \theta(\sqrt{m})).$$

En effet, cette différence représente la totalité des nombres appartenant respectivement aux classes suivantes de nombres:

1° les nombres premiers eux-mêmes entre $\sqrt[3]{m}$ et $\sqrt{m}$, soit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, en nombre

$$\mu = \theta(\sqrt{m}) - \theta(\sqrt[3]{m});$$

2° des carrés et des produits formés de ceux-ci, savoir $\alpha^2, \beta^2, \dots, \alpha\beta, \beta\gamma$, etc., en nombre $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$;

3° des produits des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ par d'autres nombres premiers $> \sqrt[3]{m}$; le nombre de ces produits étant

$$\sum_{\alpha}\left(\theta\left(\frac{m}{\alpha}\right) - \theta(\sqrt{m})\right) = \sum_{\alpha}\theta\left(\frac{m}{\alpha}\right) - \mu\theta(\sqrt{m}).$$

On a donc

$$\Phi(m\,,\,\theta(\sqrt[3]{m})) - \Phi(m\,,\,\theta(\sqrt{m})) = \frac{\mu(\mu+3)}{2} - \mu\theta(\sqrt{m}) + \sum_a \theta\left(\frac{m}{a}\right),$$

la somme $\sum\limits_a$ étendue à tous les nombres premiers de $\sqrt[3]{m}$ à $\sqrt{m}$.

La détermination de $\Phi(m\,,\,\theta(\sqrt{m}))$ est donc réduite soit au calcul de $\Phi(m\,,\,\theta(\sqrt[3]{m}))$, qui peut se faire par réductions successives, soit au calcul des termes entrant dans la somme $\sum\limits_a \theta\left(\frac{m}{a}\right)$. Puisque $m = 10^7$ donne $a > 215{\cdot}4\,,\ \frac{m}{a} < 46416$, les termes en question se trouvent le plus facilement au moyen d'une liste des nombres premiers, numérotés suivant leur grandeur. Egalement le calcul de $\Phi(m\,,\,n)$ peut être facilité par la construction de tables auxiliaires. Pour plus de détails voir le mémoire de M. Meissel.

Quant aux nombres θ, le calcul de M. Bertelsen a été fait de cette même manière, à part quelques petites modifications provenant de ce qu'il y avait à calculer une longue série de résultats de même genre devant se supporter et se contrôler mutuellement autant que possible. Pour plus de sûreté quelques-uns des nombres θ sont en outre calculés deux fois à quelque temps d'intervalle. Plus tard, M. Meissel, à qui j'avais communiqué les résultats obtenus par M. Bertelsen, a eu la bonté d'entreprendre lui-même un calcul des nombres $\theta(2.10^6)$, $\theta(3.10^6)$, $\theta(5.10^6)$ et $\theta(9.10^6)$. Il a trouvé une parfaite concordance avec M. Bertelsen, soit dans les résultats définitifs, soit dans les détails examinés. Ce surcroît de contrôle exigé par un auteur si bien versé dans ces calculs difficiles, et qui fait autorité, exclut toute crainte sur l'introduction d'erreurs systématiques.

On peut admettre qu'au moins tous les nombres θ qui sont calculés deux fois, sont tout à fait exacts et qu'on peut sérieusement compter sur les autres. Et chaque doute sur ce point disparaît quand on se rappelle que M. Bertelsen a trouvé dans les tables des diviseurs le même nombre d'erreurs concernant les nombres premiers qui devait s'y trouver d'après ses calculs de θ, et en outre quand on considère son procédé ingénieux pour découvrir ces mêmes erreurs que je vais exposer.

Par sommation directe des diviseurs insérés dans les tables, on peut trouver la somme des plus petits diviseurs des nombres composés non

divisibles par 2, 3, 5, dans un intervalle donné. Cette même somme que nous désignons par S, peut être calculée par une autre voie. Un nombre premier donné, soit p_s, se trouvera dans la table comme plus petit diviseur d'un nombre composé chaque fois qu'il sera multiplié par un nombre qui contient seulement des facteurs premiers $\overline{\overline{>}}\, p_s$. Si l'on considère l'intervalle depuis zéro à la limite m, on trouvera donc p_s comme plus petit diviseur un nombre de fois qui est donné par le symbole $\Phi\left(\frac{m}{p_s}, s-1\right)$. Pour l'intervalle de m à M, la somme S se trouvera alors par la formule

$$S = \sum_s p_s\left(\Phi\left(\frac{M}{p_s}, s-1\right) - \Phi\left(\frac{m}{p_s}, s-1\right)\right), \qquad 3 < s \leqq \theta(\sqrt{M})$$

qui donne un calcul assez facile parce que les fonctions Φ qui y entrent sont déjà calculées, au moins en partie, pour déterminer $\theta(m)$ et $\theta(M)$.

Un exemple fera mieux saisir l'utilité de cette opération. On a trouvé par le calcul

$\theta(8{,}150000) = 549150$ mais selon GLAISHER 549184. Diff. $= 34$,

$\theta(8{,}175000) = 550729$ » » » 550768. » $= 39$.

L'intervalle considéré contient donc, au moins, 5 erreurs. Deux d'entre elles sont dues à l'omission du diviseur 2617 pour les nombres 8,162423 et 8,167657; restent encore trois erreurs à chercher.

En sommant les diviseurs de la table on trouve pour le même intervalle

	$S =$	1165686
Correction	$+ 2.2617 =$	5234
	S corrigé	1170920.

Le calcul donne

$S =$	1171463
Différence	543.

Comme $543 = 3.181$, il fallait d'abord examiner dans le dit intervalle les 12 nombres dont le plus petit diviseur est 181, et l'on constata que précisément trois de ces multiples étaient indiqués comme des nombres premiers.

Ces cinq erreurs étant rectifiées, l'intervalle en question ne peut plus contenir que des erreurs n'entachant ni l'exactitude du total des nombres premiers ni celle de la somme des plus petits diviseurs. A proprement parler il ne peut rester que des erreurs où, par suite d'un lapsus calami ou d'un déplacement des caractères, le plus petit diviseur n'est pas rapporté au nombre congru. Telles sont les erreurs aux nombres 1,359233 et 8,783693, mais le cas est très rare sans doute. Dans les cas où l'on a vérifié d'après la méthode ci-dessus indiquée, on peut affirmer presque en toute sûreté que toutes les fautes sont découvertes, et cela d'autant mieux que la preuve est praticable seulement en cas d'erreurs très peu nombreuses, l'existence d'erreurs très hétérogènes dans une même intervalle nécessitant un examen détaillé.

Dans les intervalles auxquels on n'a pas appliqué la preuve par sommation, certaines erreurs ont pu passer inaperçues, mais elles ne peuvent pas influencer les nombres premiers étrangers à l'intervalle, car le classement erroné d'un nombre composé parmi les nombres premiers sera compensé par une autre erreur en sens opposé, également dans le dit intervalle.

Il y a donc raison d'admettre qu'en prenant pour point de départ les valeurs de θ calculées par M. Bertelsen et en faisant des énumérations supplémentaires dans les tables des diviseurs corrigées d'après la liste des erreurs donnée ci-dessous, on pourra déterminer, pour chaque limite inférieure à 9 millions le nombre $\theta(m)$ des nombres premiers avec une erreur d'une unité au plus.

Tel est le résultat important de l'oeuvre de M. Bertelsen. Si son but principal eût été d'entreprendre une révision complète des tables, on aurait pu employer un autre moyen de contrôle, savoir la sommation des nombres premiers eux-mêmes, opération facilitée par la disposition des tables, en procédant page par page. D'autre part la somme en question peut être calculée par une méthode analogue à celle décrite auparavant. Il aurait été bien désirable que cette vérification ou une analogue, eût été appliquée en même temps qu'on dressait les tables; il faudra également l'employer, s'il s'agit de construire de nouvelles listes des nombres premiers. Mais pour le cas des tables des diviseurs existantes le travail serait ingrat. En effet bien qu'on trouve des fautes dans ces tables, il n'en faut pas moins reconnaître qu'à tout prendre, ces tables sont remarquablement bien dressées, surtout eu égard à la grandeur du travail.

Et il ne faut pas moins apprécier ce qu'on doit à des hommes tels que MM. GLAISHER, MEISSEL et BERTELSEN, qui ont mené à fin des oeuvres supplémentaires qui permettent d'utiliser à des recherches scientifiques le contenu des tables primitives.

Reste à expliquer la dernière des tables ci-jointes. Celle-ci contient dans la 2e colonne les valeurs de $\theta(m)$ calculées par M. BERTELSEN et correspondant aux arguments de la première colonne. Sous l'entête $Gl - \theta$, la 3e colonne donne les différences des vraies valeurs de $\theta(m)$ et de celles qui sont trouvées à l'aide des énumérations de M. GLAISHER. Enfin la dernière colonne indique, pour des intervalles de 50000 au moins, l'écart de la formule de RIEMANN ou, strictement parlant, l'écart de sa partie continue. Comme je l'ai démontré, cette formule approximative peut être réduite à la forme suivante:

$$P(m) = \frac{lm}{\underline{|1} \cdot 1 s_2} + \frac{(lm)^2}{\underline{|2} \cdot 2 s_3} + \frac{(lm)^3}{\underline{|3} \cdot 3 s_4} + \ldots \qquad \left(s_i = \sum_1^\infty n^{-i}\right)$$

et dans mon mémoire sur les nombres premiers[1] j'ai donné les tables nécessaires pour en faciliter le calcul. Quoiqu'on ait raison de voir dans $P(n) + 1$ une expression de $\theta(n)$ un peu plus correcte que $P(n)$, on a préféré d'employer cette dernière pour la comparaison. M. BERTELSEN a lui-même calculé les valeurs de $P(n)$ d'après ma table et, comme le montrera la comparaison, les valeurs trouvées concordent bien avec celles calculées autrement par M. GLAISHER.[2]

A la fin de la table on a ajouté d'une part les valeurs de $\theta(m)$ pour chaque centaine de mille du 10e million, de l'autre les valeurs de $\theta(m)$ correspondant à 20 millions et à 90 millions. M. BERTELSEN est le premier qui ait fait ces calculs; il a également recalculé la valeur de $\theta(10^8)$ et constaté l'exactitude du résultat indiqué auparavant par M. MEISSEL. Le dernier nombre $\theta(10^9)$ est donné d'après cet auteur.

Ladite table contient donc ce qu'on possède aujourd'hui en fait de déterminations correctes des valeurs de $\theta(m)$.

---

[1] *Undersøgelser angaaende Mængden af Primtal under en given Grænse.* Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. 6 Række II, 6. 1884.

[2] M. GLAISHER donne, pour $n = 3300000$, $P(n) + 1 = 236961$, tandis que la valeur correcte est 236860.

TAB. I.

Liste des erreurs trouvées dans les tables des diviseurs.

9899* = 19.521

1138027* = 11.103457
1233473 *Pr.* (1233173 = 37.33329)
1249843* = 7^2.23.1109
1250111* = 53.103.229
1270471* *Pr.*
1330001* *Pr.* (1333001 = 1123.1187)
1359233 *Pr.* (1359239 = 7.277.701)
1411679 *Pr.* (1412279 = 11.128389)
1412047 = 7.13.59.263
1420847 *Pr.* (1421147 = 7.97.2093)
1496693 = 11.103.1321
1556257* = 37.42061
1618087 *Pr.* (1628087 = 1069.1523)
1619173* = 151.10723
1623703 = 151.10753
1787471 = 7^2.36479
1793023* *Pr.*
1793029* = 7.256147
1916683 = 193.9931
1936159 *Pr.* (1946159 = 1123.1733)
1979687 = 47.73.577
1984891 *Pr.* (1994891 = 797.2503)
1996399 = 67.83.359

2012603 = 887.2269
2077529 = 131.15859
2501261 = 7.17.21019
2518817 = 7.587.613
2755189 = 163.16903
2763907 = 1297.2131
2768683 *Pr.* (2768983 = 7.449.881)
2868407 *Pr.* (2888407 = 683.4229)
2903591 = 1699.1709
2913833 = 13.29.59.131
2915899 = 7.71.5867
2954939 = 13.227303
2968129 = 1607.1847
2976227 = 547.5441
2976881 *Pr.* (2976581 = 17.311.563)

3543737 *Pr.* (3543437 = 181.19577)

4801751 = 167.28753
4986869 = 29.359.479

7022623 = 1913.3671
7040029 = 1627.4327
7047113 *Pr.*
7047413 = 1997.3529
7110881 = 1861.3821
7141793 = 2617.2729
7220819 = 1877.3847
7224053 = 2143.3371
7324523 = 2467.2969
7384631 = 2179.3389
7385993 = 1933.3821
7430573 = 2089.3557
7489961 = 181.41381
7556273 = 1949.3877
7556573 *Pr.*
7576799 = 149.211.241
7601003 = 2437.3119
7601303 *Pr.*
7614461 = 2539.2999
7680451 = 1811.4241
7790381 = 2311.3371
7802999 = 2179.3581
7810963 = 1847.4229
7820201 = 1831.4271
7845427 = 1901.4127
7855549 = 13.29.67.311
7856147 = 13.604319

7857343 = 13.604411
7860931 = 13.101.5987
7861517 = 2383.3299
7861529 = 13.604733
7863323 = 13.107.5653
7864519 = 13.701.863
7865117 = 13.605009
7866911 = 13.605147
7868107 = 13.605239
7887931 = 367.21493
7927501 = 1879.4219
7933649 = 2341.3389
7941047 = 1831.4337

8057743 = 2617.3079
8068211 = 2617.3083
8083913 = 2617.3089
8136253 = 2617.3109
8162423 = 2617.3119
8167657 = 2617.3121
8167987 = 181.45127
8169797 = 181.45137
8170159 = 181.45139
8209529 = 2617.3137
8277571 = 2617.3163
8282197 = 7.11.29.3709
8288039 = 2617.3167
8293273 = 2617.3169
8318393 = 43.193451
8324677 = 2617.3181
8340379 = 2617.3187
8350847 = 2617.3191
8382251 = 2617.3203
8397953 = 2617.3209
8418889 = 2617.3217
8427193 = 67.73.1723
8429357 = 2617.3221

8450293 = 2617.3229
8456059 = 239.35381
8478889 *Pr.* (8488889 = 233.36433)
8486449 = 277.30637
8491187 = 569.14923
8496181 = 1223.6947
8500853 = 277.30689
8507867 = 2617.3251
8513101 = 2617.3253
8523569 = 2617.3257
8525317 = 877.9721
8528803 = 2617.3259
8536319 = 11.776029
8560207 = 2617.3271
8633483 = 2617.3299
8638717 = 2617.3301
8654419 = 2617.3307
8670121 = 2617.3313
8685823 = 2617.3319
8696291 = 2617.3323
8711993 = 2617.3329
8717227 = 2617.3331
8748631 = 2617.3343
8759099 = 2617.3347
8783693 = 571.15383 (5171)
8783699 = 149.58951 (49)
8788069 = 2017.4357
8790503 = 2617.3359
8795737 = 2617.3361
8821907 = 2617.3371
8827141 = 2617.3373
8869013 = 2617.3389
8874247 = 2617.3391
8916119 = 2617.3407
8931821 = 2617.3413
8984161 = 2617.3433

Le signe * dénote que l'erreur indiquée est connue auparavant.

Pr. désigne un nombre premier.

Le nombre 3026279, auquel BURCKHARDT a attribué le diviseur 79, est, comme l'a indiqué M. GLAISHER, premier.

Dans la page 72 du 1^{er} million les nombres 63 et 64 dans l'en-tête se trouvent au-dessus 00 et 03 au lieu de 97 et 00.

Tab. II.

Nombres calculés des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.

m en millions	$\theta(m)$	$Gl - \theta$	$P - \theta$
0·100	9592	0	− 6
·200	17984	0	− 3
·300	25997	0	+ 25
·400	33860	0	− 9
·500	41538	0	− 9
·600	49098	0	− 8
·700	56543	0	+ 13
·800	63951	0	− 7
·900	71274	0	− 9
1·000	78498	0	+ 28
·025	80335	0	
·050	82134	0	+ 3
·075	83905	0	
·100	85714	0	+ 22
·125	87519	0	
·150	89302	+ 1	+ 20
·175	91120	+ 1	
·200	92938	+ 1	− 40
·225	94693	+ 1	
·250	96469	0	− 6
·275	98257	− 1	
·300	100021	− 1	− 3
·325	101802	− 1	
·350	103544	− 2	+ 19
·375	105313	− 3	
·400	107126	− 3	− 27
·425	108843	− 5	
·450	110630	− 5	− 4
·475	112389	− 5	
·500	114155	− 4	− 10
·525	115935	− 4	
·550	117663	− 4	− 8
·575	119414	− 3	
·600	121127	− 3	+ 31
·625	122885	− 2	
1·650	124634	− 2	+ 18
·675	126392	− 2	
·700	128141	− 2	− 1
·725	129862	− 2	
·750	131608	− 2	+ 12
·775	133324	− 2	
·800	135072	− 1	+ 22
·825	136813	− 1	
·850	138542	− 1	+ 18
·875	140291	− 1	
·900	142029	− 1	− 8
·925	143754	0	
·950	145502	− 1	− 27
·975	147182	− 1	
2·000	148933	− 2	− 10
·025	150669	− 1	
·050	152382	− 1	− 18
·075	154104	− 1	
·100	155805	0	− 4
·125	157521	0	
·150	159250	0	− 19
·175	160973	0	
·200	162662	0	− 5
·225	164360	0	
·250	166081	0	− 5
·275	167836	0	
·300	169511	0	− 20
·325	171189	0	
·350	172873	0	+ 28
·375	174578	0	
·400	176302	0	+ 3
·425	177988	0	
·450	179684	0	+ 21
·475	181378	0	
·500	183072	0	+ 29

m en millions	$\theta(m)$	$Gl - \theta$	$P - \theta$
2·525	184781	+ 1	
·550	186462	+ 1	+ 29
·575	188157	+ 1	
·600	189880	+ 1	− 3
·625	191557	+ 1	
·650	193256	+ 1	+ 3
·675	194932	+ 1	
·700	196645	+ 1	− 9
·725	198341	+ 1	
·750	199993	+ 1	+ 17
·775	201687	0	
·800	203362	0	+ 17
·825	205095	0	
·850	206789	0	− 45
·875	208449	− 1	
·900	210109	− 1	− 4
·925	211793	0	
·950	213453	0	+ 9
·975	215126	+ 1	
3·000	216816	0	− 1
·100	223492	0	+ 19
·200	230209	0	− 17
·300	236900	0	− 41
·400	243539	0	− 26
·500	250150	0	+ 4
·600	256726	− 1	+ 57
·700	263397	− 1	+ 2
·800	269987	− 1	+ 16
·900	276611	− 1	− 15
4·000	283146	− 1	+ 32
·100	289774	− 1	− 25
·200	296314	− 1	− 4
·300	302824	− 1	+ 36
·400	309335	− 1	+ 66
·500	315948	− 1	− 17
·600	322441	− 1	+ 12
·700	328964	− 1	+ 1
·800	335439	− 1	+ 29
·900	341992	0	− 30
5·000	348513	+ 1	− 65
5·100	354971	+ 1	− 46
·200	361407	+ 1	− 13
·300	367900	+ 1	− 45
·400	374362	+ 1	− 53
·500	380800	+ 1	− 46
·600	387202	+ 1	− 10
·700	393606	+ 1	+ 17
·800	399993	+ 1	+ 53
·900	406429	+ 1	+ 33
6·000	412849	+ 1	+ 23
·100	419246	+ 1	+ 28
·200	425648	+ 1	+ 22
·300	432073	+ 1	− 14
·400	438410	+ 1	+ 32
·500	444757	+ 1	+ 61
·600	451159	+ 1	+ 30
·700	457497	+ 1	+ 56
·800	463872	+ 1	+ 39
·900	470283	+ 1	− 20
7·000	476648	+ 1	− 39
·050	479864	+ 3	− 84
·100	483015	+ 3	− 66
·150	486167	+ 5	− 50
·200	489319	+ 5	− 35
·250	492494	+ 6	− 44
·300	495666	+ 6	− 53
·350	498797	+ 7	− 21
·400	501962	+ 9	− 25
·450	505147	+ 10	− 50
·500	508261	+ 11	− 5
·550	511417	+ 11	− 4
·600	514565	+ 12	+ 4
·650	517740	+ 13	− 17
·700	520910	+ 14	− 33
·750	524026	+ 14	+ 3
·800	527154	+ 15	+ 25
·850	530334	+ 19	− 5
·900	533506	+ 27	− 29
·950	536652	+ 30	− 28
8·000	539777	+ 30	− 7

m en millions	$\theta(m)$	$Gl - \theta$	$P - \theta$
8·050	542898	+ 30	+ 16
·100	546024	+ 33	+ 33
·150	549150	+ 34	+ 49
·200	552319	+ 39	+ 21
·250	555479	+ 40	+ 1
·300	558597	+ 44	+ 21
·350	561766	+ 46	− 11
·400	564877	+ 49	+ 14
·450	567967	+ 51	+ 59
·500	571119	+ 52	+ 41
·550	574274	+ 57	+ 19
·600	577439	+ 58	− 15
·650	580566	+ 60	− 12
·700	583714	+ 64	− 31
·750	586850	+ 67	− 39
·800	590006	+ 71	− 68
.850	593112	+ 73	− 48
·900	596222	+ 75	− 33
·950	599355	+ 77	− 43

m en millions	$\theta(m)$	$Gl - \theta$	$P - \theta$
9·000	602489	+ 78	− 54
·100	608672		+ 5
·200	614917		− 3
·300	621177		− 30
·400	627400		− 23
·500	633578		+ 24
·600	639851		− 28
·700	646054		− 15
·800	652265		− 13
·900	658445		+ 16
10·000	664579		+ 87
20·000	1270607		− 37
90·000	5216954		+ 227
100·000	5761455		+ 96
1000·000	50847478		− 24

TABELLE DER KLEINSTEN PRIMITIVEN WURZELN g

ALLER UNGERADEN PRIMZAHLEN p UNTER 3000

VON

G. WERTHEIM
in FRANKFURT a. M.

Jede Primzahl, für welche 10 primitive Wurzel ist, ist mit dem Zeichen * versehen.

p	$p-1$	g	p	$p-1$	g	p	$p-1$	g
3	2	2	79	2.3.13	3	181*	$2^2.3^2.5$	2
5	2^2	2	83	2.41	2	191	2.5.19	19
7*	2.3	3	89	$2^3.11$	3	193*	$2^6.3$	5
11	2.5	2	97*	$2^5.3$	5	197	$2^2.7^2$	2
13	$2^2.3$	2	101	$2^2.5^2$	2	199	$2.3^2.11$	3
17*	2^4	3	103	2.3.17	5	211	2.3.5.7	2
19*	2.3^2	2	107	2.53	2	223*	2.3.37	3
23*	2.11	5	109*	$2^2.3^3$	6	227	2.113	2
29*	$2^2.7$	2	113*	$2^4.7$	3	229*	$2^2.3.19$	6
31	2.3.5	3	127	$2.3^2.7$	3	233*	$2^3.29$	3
37	$2^2.3^2$	2	131*	2.5.13	2	239	2.7.17	7
41	$2^3.5$	6	137	$2^3.17$	3	241	$2^4.3.5$	7
43	2.3.7	3	139	2.3.23	2	251	2.5^3	6
47*	2.23	5	149*	$2^2.37$	2	257*	2^8	3
53	$2^2.13$	2	151	$2.3.5^2$	6	263*	2.131	5
59*	2.29	2	157	$2^2.3.13$	5	269*	$2^2.67$	2
61*	$2^2.3.5$	2	163	2.3^4	2	271	$2.3^3.5$	6
67	2.3.11	2	167*	2.83	5	277	$2^2.3.23$	5
71	2.5.7	7	173	$2^2.43$	2	281	$2^3.5.7$	3
73	$2^3.3^2$	5	179*	2.89	2	283	2.3.47	3

p	$p-1$	g	p	$p-1$	g	p	$p-1$	g
293	$2^2.73$	2	547	$2.3.7.13$	2	809	$2^3.101$	3
307	$2.3^2.17$	5	557	$2^2.139$	2	811*	$2.3^4.5$	3
311	$2.5.31$	17	563	2.281	2	821*	$2^2.5.41$	2
313*	$2^3.3.13$	10	569	$2^3.71$	3	823*	$2.3.137$	3
317	$2^2.79$	2	571*	$2.3.5.19$	3	827	$2.7.59$	2
331	$2.3.5.11$	3	577*	$2^6.3^2$	5	829	$2^2.3^2.23$	2
337*	$2^4.3.7$	10	587	2.293	2	839	2.419	11
347	2.173	2	593*	$2^4.37$	3	853	$2^2.3.71$	2
349	$2^2.3.29$	2	599	$2.13.23$	7	857*	$2^3.107$	3
353	$2^5.11$	3	601	$2^3.3.5^2$	7	859	$2.3.11.13$	2
359	2.179	7	607	$2.3.101$	3	863*	2.431	5
367*	$2.3.61$	6	613	$2^2.3^2.17$	2	877	$2^2.3.73$	2
373	$2^2.3.31$	2	617	$2^3.7.11$	3	881	$2^4.5.11$	3
379*	$2.3^3.7$	2	619*	$2.3.103$	2	883	$2.3^2.7^2$	2
383*	2.191	5	631	$2.3^2.5.7$	3	887*	2.443	5
389*	$2^2.97$	2	641	$2^7.5$	3	907	$2.3.151$	2
397	$2^2.3^2.11$	5	643	$2.3.107$	11	911	$2.5.7.13$	17
401	$2^4.5^2$	3	647*	$2.17.19$	5	919	$2.3^3.17$	7
409	$2^3.3.17$	21	653	$2^2.163$	2	929	$2^5.29$	3
419*	$2.11.19$	2	659*	$2.7.47$	2	937*	$2^3.3^2.13$	5
421	$2^2.3.5.7$	2	661	$2^2.3.5.11$	2	941*	$2^2.5.47$	2
431	$2.5.43$	7	673	$2^5.3.7$	5	947	$2.11.43$	2
433*	$2^4.3^3$	5	677	$2^2.13^2$	2	953*	$2^3.7.17$	3
439	$2.3.73$	15	683	$2.11.31$	5	967	$2.3.7.23$	5
443	$2.13.17$	2	691	$2.3.5.23$	3	971*	$2.5.97$	6
449	$2^6.7$	3	701*	$2^2.5^2.7$	2	977*	$2^4.61$	3
457	$2^3.3.19$	13	709*	$2^2.3.59$	2	983*	2.491	5
461*	$2^2.5.23$	2	719	2.359	11	991	$2.3^2.5.11$	6
463	$2.3.7.11$	3	727*	$2.3.11^2$	5	997	$2^2.3.83$	7
467	2.233	2	733	$2^2.3.61$	6	1009	$2^4.3^2.7$	11
479	2.239	13	739	$2.3^2.41$	3	1013	$2^2.11.23$	2
487*	2.3^5	3	743*	$2.7.53$	5	1019*	2.509	2
491*	$2.5.7^2$	2	751	$2.3.5^3$	3	1021*	$2^2.3.5.17$	7
499*	$2.3.83$	7	757	$2^2.3^3.7$	2	1031	$2.5.103$	14
503*	2.251	5	761	$2^3.5.19$	6	1033*	$2^3.3.43$	5
509*	$2^2.127$	2	769	$2^8.3$	11	1039	$2.3.173$	3
521	$2^3.5.13$	3	773	$2^2.193$	2	1049	$2^3.131$	3
523	$2.3^2.29$	2	787	$2.3.131$	2	1051*	$2.3.5^2.7$	7
541*	$2^2.3^3.5$	2	797	$2^2.199$	2	1061	$2^2.5.53$	2

p	$p-1$	g	p	$p-1$	g	p	$p-1$	g
1063*	$2.3^2.59$	3	1361	$2^4.5.17$	3	1621*	$2^2.3^4.5$	2
1069*	$2^2.3.89$	6	1367*	2.683	5	1627	$2.3.271$	3
1087*	$2.3.181$	3	1373	$2^2.7^3$	2	1637	$2^2.409$	2
1091*	$2.5.109$	2	1381*	$2^2.3.5.23$	2	1657	$2^3.3^2.23$	11
1093	$2^2.3.7.13$	5	1399	$2.3.233$	13	1663*	$2.3.277$	3
1097*	$2^3.137$	3	1409	$2^7.11$	3	1667	$2.7^2.17$	2
1103*	$2.19.29$	5	1423	$2.3^2.79$	3	1669	$2^2.3.139$	2
1109*	$2^2.277$	2	1427	$2.23.31$	2	1693	$2^2.3^2.47$	2
1117	$2^2.3^2.31$	2	1429*	$2^2.3.7.17$	6	1697*	$2^5.53$	3
1123	$2.3.11.17$	2	1433*	$2^3.179$	3	1699	$2.3.283$	3
1129	$2^3.3.47$	11	1439	2.719	7	1709*	$2^2.7.61$	3
1151	$2.5^2.23$	17	1447*	$2.3.241$	3	1721	$2^3.5.43$	3
1153*	$2^7.3^2$	5	1451	$2.5^2.29$	2	1723	$2.3.7.41$	3
1163	$2.7.83$	5	1453	$2^2.3.11^2$	2	1733	$2^2.433$	2
1171*	$2.3^2.5.13$	2	1459	2.3^6	3	1741*	$2^2.3.5.29$	2
1181*	$2^2.5.59$	7	1471	$2.3.5.7^2$	6	1747	$2.3^2.97$	2
1187	2.593	2	1481	$2^3.5.37$	3	1753	$2^3.3.73$	7
1193*	$2^3.149$	3	1483	$2.3.13.19$	2	1759	$2.3.293$	6
1201	$2^4.3.5^2$	11	1487*	2.743	5	1777*	$2^4.3.37$	5
1213*	$2^2.3.101$	2	1489	$2^4.3.31$	14	1783*	$2.3^4.11$	10
1217*	$2^6.19$	3	1493	$2^2.373$	2	1787	$2.19.47$	2
1223*	$2.13.47$	5	1499	$2.7.107$	2	1789*	$2^2.3.149$	6
1229*	$2^2.307$	2	1511	$2.5.151$	11	1801	$2^3.3^2.5^2$	11
1231	$2.3.5.41$	3	1523	2.761	2	1811*	$2.5.181$	6
1237	$2^2.3.103$	2	1531*	$2.3^2.5.17$	2	1823*	2.911	5
1249	$2^5.3.13$	7	1543*	$2.3.257$	5	1831	$2.3.5.61$	3
1259*	$2.17.37$	2	1549*	$2^2.3^2.43$	2	1847*	$2.13.71$	5
1277	$2^2.11.29$	2	1553*	$2^4.97$	3	1861*	$2^2.3.5.31$	2
1279	$2.3^2.71$	3	1559	$2.19.41$	19	1867	$2.3.311$	2
1283	2.641	2	1567*	$2.3^3.29$	3	1871	$2.5.11.17$	14
1289	$2^3.7.23$	6	1571*	$2.5.157$	2	1873*	$2^4.3^2.13$	10
1291*	$2.3.5.43$	2	1579*	$2.3.263$	3	1877	$2^2.7.67$	2
1297*	$2^4.3^4$	10	1583*	$2.7.113$	5	1879	$2.3.313$	6
1301*	$2^2.5^2.13$	2	1597	$2^2.3.7.19$	11	1889	$2^5.59$	3
1303*	$2.3.7.31$	6	1601	$2^6.5^2$	3	1901	$2^2.5^2.19$	2
1307	2.653	2	1607*	$2.11.73$	5	1907	2.953	2
1319	2.659	13	1609	$2^3.3.67$	7	1913*	$2^3.239$	3
1321	$2^3.3.5.11$	13	1613	$2^2.13.31$	3	1931	$2.5.193$	2
1327*	$2.3.13.17$	3	1619*	2.809	2	1933	$2^2.3.7.23$	5

p	$p-1$	g	p	$p-1$	g	p	$p-1$	g
1949*	$2^2.487$	2	2251*	$2.3^2.5^3$	7	2551	$2.3.5^2.17$	6
1951	$2.3.5^2.13$	3	2267	$2.11.103$	2	2557	$2^2.3^2.71$	2
1973	$2^2.17.29$	2	2269*	$2^2.3^4.7$	2	2579*	2.1289	2
1979*	$2.23.43$	2	2273*	$2^5.71$	3	2591	$2.5.7.37$	7
1987	$2.3.331$	2	2281	$2^3.3.5.19$	7	2593*	$2^5.3^4$	10
1993*	$2^3.3.83$	5	2287	$2.3^2.127$	19	2609	$2^4.163$	3
1997	$2^2.499$	2	2293	$2^2.3.191$	2	2617*	$2^3.3.109$	5
1999	$2.3^3.37$	3	2297*	$2^3.7.41$	5	2621*	$2^2.5.131$	2
2003	$2.7.11.13$	5	2309*	$2^2.577$	2	2633*	$2^3.7.47$	3
2011	$2.3.5.67$	3	2311	$2.3.5.7.11$	3	2647	$2.3^3.7^2$	3
2017*	$2^5.3^2.7$	5	2333	$2^2.11.53$	2	2657*	$2^5.83$	3
2027	2.1013	2	2339*	$2.7.167$	2	2659	$2.3.443$	2
2029*	$2^2.3.13^2$	2	2341*	$2^2.3^2.5.13$	7	2663*	2.11^3	5
2039	2.1019	7	2347	$2.3.17.23$	3	2671	$2.3.5.89$	7
2053	$2^2.3^3.19$	2	2351	$2.5^2.47$	13	2677	$2^2.3.223$	2
2063*	2.1031	5	2357	$2^2.19.31$	2	2683	$2.3^2.149$	2
2069*	$2^2.11.47$	2	2371*	$2.3.5.79$	2	2687*	$2.17.79$	5
2081	$2^5.5.13$	3	2377	$2^3.3^3.11$	5	2689	$2^7.3.7$	19
2083	$2.3.347$	2	2381	$2^2.5.7.17$	3	2693	$2^2.673$	2
2087	$2.7.149$	5	2383*	$2.3.397$	5	2699*	$2.19.71$	2
2089	$2^3.3^2.29$	7	2389*	$2^2.3.199$	2	2707	$2.3.11.41$	2
2099*	2.1049	2	2393	$2^3.13.23$	3	2711	$2.5.271$	7
2111	$2.5.211$	7	2399	$2.11.109$	11	2713*	$2^3.3.113$	5
2113*	$2^6.3.11$	5	2411*	$2.5.241$	6	2719	$2.3^2.151$	3
2129	$2^4.7.19$	3	2417*	$2^4.151$	3	2729*	$2^3.11.31$	3
2131	$2.3.5.71$	2	2423*	$2.7.173$	5	2731	$2.3.5.7.13$	3
2137*	$2^3.3.89$	10	2437*	$2^2.3.7.29$	2	2741*	$2^2.5.137$	2
2141*	$2^2.5.107$	2	2441	$2^3.5.61$	6	2749	$2^2.3.229$	6
2143*	$2.3^2.7.17$	3	2447*	2.1223	5	2753*	$2^6.43$	3
2153*	$2^3.269$	3	2459*	2.1229	2	2767*	$2.3.461$	3
2161	$2^4.3^3.5$	14	2467	$2.3^2.137$	2	2777*	$2^3.347$	3
2179*	$2.3^2.11^2$	7	2473*	$2^3.3.103$	5	2789*	$2^2.17.41$	2
2203	$2.3.367$	5	2477	$2^2.619$	2	2791	$2.3^2.5.31$	6
2207*	2.1103	5	2503	$2.3^2.139$	3	2797	$2^2.3.233$	2
2213	$2^2.7.79$	2	2521	$2^3.3^2.5.7$	17	2801	$2^4.5^2.7$	3
2221*	$2^2.3.5.37$	2	2531	$2.5.11.23$	2	2803	$2.3.467$	2
2237	$2^2.13.43$	2	2539*	$2.3^3.47$	2	2819*	2.1409	2
2239	$2.3.373$	3	2543*	$2.31.41$	5	2833*	$2^4.3.59$	5
2243	$2.19.59$	2	2549*	$4.7^2.13$	2	2837	$2^2.709$	2

p	$p-1$	g	p	$p-1$	g	p	$p-1$	g
2843	$2.7^2.29$	2	2897*	$2^4.181$	3	2953	$2^3.3^2.41$	13
2851*	$2.3.5^2.19$	2	2903*	2.1451	5	2957	$2^2.739$	2
2857	$2^3.3.7.17$	11	2909*	$2^2.727$	2	2963	2.1481	2
2861*	$2^2.5.11.13$	2	2917	$2^2.3^6$	5	2969	$2^3.7.53$	3
2879	2.1439	7	2927*	$2.7.11.19$	5	2971*	$2.3^3.5.11$	10
2887	$2.3.13.37$	5	2939*	$2.13.113$	2	2999	2.1499	7

Frankfurt a. M., August 1892.

SUR LES MAXIMA ET LES MINIMA DES INTÉGRALES DOUBLES.

Second Mémoire

PAR

GUSTAF KOBB

À STOCKHOLM.

Dans un mémoire précédent[1] nous avons étudié la question de la recherche des maxima et des minima d'une intégrale double dans les cas où les variations de la valeur de l'intégrale sont complètement libres; c'est à dire, la classe de problèmes qu'on appelle des maxima ou des minima absolus. Il y a un autre genre de questions, où l'on se propose de chercher les maxima et les minima d'une certaine intégrale sous la condition que la valeur d'une ou de plusieurs autres intégrales reste invariable quand la valeur de la première est variée. Alors les variations de la première intégrale ne sont plus libres. Dans ce mémoire, nous allons traiter la classe de problèmes qu'on appelle des maxima et des minima relatifs.

Soient

$$I^0 = \iint_C F^0(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')du\,dv, \tag{1}$$

$$I' = \iint_C F'(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')du\,dv \tag{2}$$

---

[1] *Sur les maxima et les minima des intégrales doubles.* Acta mathematica, tome 16, p. 65.

deux intégrales doubles, où comme auparavant

$$x' = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad y' = \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad z' = \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$x'' = \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad y'' = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad z'' = \frac{\partial z}{\partial v}$$

et F^0 et F' sont des fonctions régulières et bien définies. Les limites des deux intégrales sont les mêmes. Nous nous proposons de trouver une surface qui rende la première intégrale un maximum ou un minimum sous les conditions que la seconde conserve une valeur donnée et que la surface passe par un certain contour C dans l'espace. Nous nous bornerons pourtant à considérer des fonctions F^0 et F' telles, que les valeurs des intégrales soient indépendantes du choix des variables auxiliaires u et v.

Nous avons trouvé auparavant que, dans ce cas, les fonctions F^0 et F' doivent satisfaire aux relations I (4) [1]

$$F = x' \frac{\partial F}{\partial x'} + y' \frac{\partial F}{\partial y'} + z' \frac{\partial F}{\partial z'},$$

$$0 = x'' \frac{\partial F}{\partial x'} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + z'' \frac{\partial F}{\partial z'},$$

$$F = x'' \frac{\partial F}{\partial x''} + y'' \frac{\partial F}{\partial y''} + z'' \frac{\partial F}{\partial z''},$$

$$0 = x' \frac{\partial F}{\partial x''} + y' \frac{\partial F}{\partial y''} + z' \frac{\partial F}{\partial z''}.$$

Il faut d'abord montrer qu'il existe des variations de la surface

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

pour lesquelles la seconde intégrale conserve sa valeur. Si nous étendons l'intégration sur la surface

$$x + \xi, \qquad y + \eta, \qquad z + \zeta$$

---

[1] Ces citations se rapportent à mon premier mémoire *Sur les maxima et les minima des intégrales doubles.*

nous obtenons la valeur de la variation correspondante de l'intégrale I' suivant I (16)

$$\Delta I' = \iint G' w\,du\,dv + (\ldots)_2 + \cdots \tag{3}$$

en employant les mêmes notations qu'auparavant. Posons maintenant

$$\xi = k_1\xi_1 + k_2\xi_2, \quad \eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2, \quad \zeta = k_1\zeta_1 + k_2\zeta_2 \tag{4}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes quelconques et $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ des fonctions arbitraires qui s'annullent aux limites. Ensuite

$$w_i = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \xi_i + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \eta_i + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \zeta_i, \qquad (i=1,2)$$

$$M_i' = \iint G' w_i\,du\,dv.$$

On aura

$$w = k_1 w_1 + k_2 w_2$$

et

$$\Delta I' = k_1 M_1' + k_2 M_2' + (\ldots)_2 + \cdots.$$

Les fonctions M_1 et M_2 sont complètement déterminées, aussitôt que nous avons fixé $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$. Pour que l'intégrale I' conserve sa valeur, il faut que

$$0 = k_1 M_1' + k_2 M_2' + (\ldots)_2 + \cdots.$$

Supposons

$$M_2' \gtrless 0.$$

Cela est toujours possible, sauf le cas, où

$$G' = 0.$$

Mais cette équation est une des conditions nécessaires pour que l'intégrale I' soit un maximum ou un minimum. C'est, par conséquent, un cas particulier qu'il faut exclure.

Si M_2' n'est pas nul, on a, suivant un théorème connu de la théorie des fonctions

$$k_2 = -\frac{M_1'}{M_2'} k_1 + k_1 \mathfrak{P}(k_1).$$

En substituant cette valeur dans les expressions (4), nous avons de variations qui ne changent pas la valeur de l'intégrale I'.

Nous avons ensuite la valeur de la variation de l'intégrale I^0:

$$\Delta I^0 = \iint G^0 w du dv + (\ldots)_2$$
$$= k_1 M_1^0 + k_2 M_2^0 + (\ldots)_2,$$
$$M_i^0 = \iint G^0 w_i du dv$$

ou, en employant la valeur trouvée de k_2,

$$\Delta I^0 = k_1\left(M_1^0 - \frac{M_1'}{M_2'} M_2^0\right) + (k_1)_2 + \ldots . \tag{5}$$

Mais pour que ΔI^0 conserve toujours le même signe, il faut que le coefficient de k_1 s'annulle. Ainsi

$$M_1^0 - \frac{M_1'}{M_2'} M_2^0 = 0$$

ou

$$\frac{M_1^0}{M_1'} = \frac{M_2^0}{M_2'}. \tag{6}$$

Le premier membre dépend de ξ_1, η_1, ζ_1 et le second de ξ_2, η_2, ζ_2. Le quotient a donc une valeur constante, indépendante des variations, que nous appelons λ. Alors

$$M_1^0 - \lambda M_1' = 0$$

ou

$$\iint (G^0 - \lambda G') w_1 du dv = 0$$

d'où résulte l'équation aux dérivées partielles du second ordre [1]

$$G = G^0 - \lambda G' = 0 \tag{7}$$

qui est analogue à celle que nous avons trouvée dans le cas des maxima et des minima absolus.

---

[1] Dans la suite une majuscule signifie toujours une expression de la forme

$$A^0 - \lambda A'.$$

Pour ramener la variation totale de l'intégrale I' ou de l'intégrale I^0 à la forme (3), nous sommes obligés de supposer ou bien que la surface primitive ne possède pas de lignes de discontinuité, c'est à dire des lignes le long desquelles la normale de la surface change brusquement sa direction, ou bien que les variations s'annullent le long de celles-ci. Cependant il est évident que chaque partie régulière de la surface doit satisfaire à l'équation

$$G = 0$$

où λ a toujours la même valeur. En effet, nous pouvons varier la surface, de manière qu'une partie régulière seule soit variée, et que le reste conserve sa forme. Alors cette partie doit satisfaire à l'équation (7).

Ensuite nous avons vu que la valeur de λ est indépendante des variations. Mais parmi celles-ci il en existe certainement, qui ne varient qu'une partie régulière de la surface. Mais la valeur correspondante de λ doit être la même, si toute la surface est variée. Par conséquent, la valeur de λ est la même pour chaque partie de la surface qui peut être variée.

Supposons maintenant qu'il existe des lignes de discontinuité sur la surface primitive et que les variations ne s'annullent pas suivant celles-ci. Alors la variation totale des intégrales n'est pas réductible à la forme (3). Nous avons déjà traité la même question pour le cas des maxima ou des minima absolus. Ici on peut procéder de la même manière et on trouve en posant

$$F = F^0 - \lambda F^{(1)}$$

que les expressions

$$\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial u}{\partial s}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial u}{\partial s}, \qquad \frac{\partial F}{\partial z'}\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial z'}\frac{\partial u}{\partial s} \tag{8}$$

doivent avoir les mêmes valeurs aux deux côtés de la ligne de discontinuité, pour que l'intégrale I^0 puisse être un maximum ou un minimum. C'est, par conséquent, encore une condition nécessaire.

Nous avons vu que la surface primitive doit satisfaire à l'équation (7)

$$G = G^0 - \lambda G' = 0.$$

Supposons que nous ayons trouvé une solution de cette équation; il nous

faut puis montrer, qu'elle donne un vrai maximum ou un vrai minimum ou que la variation totale ΔI^0 pour chaque variation, qui ne change pas la valeur de la seconde intégrale, conserve le même signe. Nous suivons la même marche que dans le cas des maxima et des minima absolus.

Ainsi, il se présente d'abord la question: Ayant trouvé une solution de l'équation (7) qui passe par le contour donné, est-ce qu'il existe une autre, qui à chaque point est infiniment voisine de la première? Il faut pourtant généraliser un peu la question. La quantité λ est une constante, dont la valeur est déterminée par la condition que la seconde intégrale I' conserve toujours la même valeur. Par conséquent, la valeur de λ n'est pas la même pour deux surfaces infiniment voisines. Il faut donc considérer λ comme une quantité variable, quand nous voulons répondre à la question énoncée.

On voit immédiatement qu'à la même surface il ne peut pas correspondre plusieurs valeurs de λ. On aurait

$$G^0 - \lambda G' = 0,$$

$$G^0 - \lambda_1 G' = 0$$

d'où suit

$$(\lambda - \lambda_1) G' = 0$$

et

$$\lambda = \lambda_1$$

car nous avons déjà exclu le cas

$$G' = 0.$$

Soit maintenant

$$x + \xi, \qquad y + \eta, \qquad z + \zeta$$

une nouvelle solution de l'équation (7), où pourtant la valeur de λ est changée en $\lambda + \lambda'$ on aura

$$G(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, \lambda + \lambda') - G(x, y, z, \lambda) = 0.$$

Cette différence peut s'ecrire

$$G^0(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - \lambda G'(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$$
$$- [G^0(x, y, z) - \lambda G'(x, y, z)] - \lambda' G'(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$$

ou

$$\Delta G - \lambda' G'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = 0$$

si nous entendons avec le symbole d'opération Δ, que λ soit regardé comme une constante.

Mais au lieu de considérer l'équation unique

$$G = 0$$

il vaut mieux considérer le système équivalent I (15)

$$(9)\qquad \begin{cases} \Gamma_1 = \Gamma_1^0 - \lambda\Gamma_1' = \dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x''}\right) = \alpha G, \\ \Gamma_2 = \Gamma_2^0 - \lambda\Gamma_2' = \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right) = \beta G, \\ \Gamma_3 = \Gamma_3^0 - \lambda\Gamma_3' = \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z''}\right) = \gamma G. \end{cases}$$

De la première de ces équations nous aurons

$$\Gamma_1(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, \lambda+\lambda') - \Gamma_1(x, y, z, \lambda)$$
$$= \Delta\Gamma_1 - \lambda'\Gamma_1'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)$$

où en observant que

$$\Gamma_1' = \alpha G',$$

le second membre devient

$$\Delta\Gamma_1 - \lambda'\alpha G'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = 0.$$

De la même manière nous formons les deux autres différences

$$\Delta\Gamma_2 - \lambda'\beta G'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = 0,$$
$$\Delta\Gamma_3 - \lambda'\gamma G'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = 0.$$

Multiplions la première de ces équations par ξ, la seconde par η, la troisième par ζ et ajoutons; ensuite, multiplions par $dudv$ et intégrons dans l'intérieur du contour donné.

Alors nous aurons l'intégrale

$$(10)\quad \iint \{\xi\Delta\Gamma_1 + \eta\Delta\Gamma_2 + \zeta\Delta\Gamma_3 - \lambda' G'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) w\} du dv,$$

$$w = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta.$$

Evidemment, cette intégrale double est nulle. Nous allons la transformer. D'abord on remarquera que les variations ξ, η, ζ, ne sont pas libres, elles sont assujetties à la condition que la seconde intégrale I' conserve sa valeur. Ainsi

$$\Delta I' = 0$$

ou, en arrêtant le développement aux termes du second ordre,

$$(11)\qquad 0 = \iint \{G'w + \sum B_{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu\} du dv$$

où τ_μ et τ_ν désignent les variations ξ, η, ζ et leurs dérivées du premier ordre. Les coefficients $B_{\mu\nu}$ de la forme quadratique sont des fonctions connues de x, y et z. Ensuite,

$$\iint \lambda' G'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) w du dv = \iint (\lambda' G' w + \lambda' \sum B'_{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu) du dv.$$

Enfin, nous avons montré dans le mémoire précédent, que, si nous arrêtons le développement de $\Delta\Gamma_1$, $\Delta\Gamma_2$ et $\Delta\Gamma_3$ aux termes du second ordre, l'intégrale

$$\iint \{\xi\Delta\Gamma_1 + \eta\Delta\Gamma_2 + \zeta\Delta\Gamma_3\} du dv$$

peut être transformée dans la forme suivante

$$\iint \{\sum A_{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu + \sum A'_{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu\} du dv.$$

La première forme quadratique provient uniquement des termes du premier ordre, ses coefficients $A_{\mu\nu}$ sont indépendants de τ_μ et τ_ν et ils sont des fonctions connues de x, y, z. Dans la seconde, au contraire, les coefficients $A'_{\mu\nu}$ sont des fonctions linéaires et homogènes de τ_μ et τ_ν. Maintenant l'intégrale (10) peut s'écrire

$$(12)\qquad 0 = \iint \{\sum A_{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu + \sum A'_{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu - \lambda' G' w - \lambda' \sum B'_{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu\} du dv.$$

En multipliant l'équation (11) par λ' et en l'ajoutant à l'équation (12), nous aurons

$$(13) \qquad 0 = \iint \{ \Sigma [A_{\mu\nu} + A'_{\mu\nu} + \lambda'(B_{\mu\nu} - B'_{\mu\nu})] \tau_\mu \tau_\nu \} du dv.$$

Il s'agit de voir, si cette équation peut être satisfaite par des valeurs de ξ, η, ζ qui changent, réellement, la surface primitive. Il existe, évidemment, une infinité de manières à varier la surface, de sorte qu'elle coïncide avec elle-même.

Nous avons vu qu'il suffit de poser

$$\xi = al, \qquad \eta = bl, \qquad \zeta = cl$$

où a, b, c sont les cosinus directeurs de la normale de la surface primitive au point (x, y, z).

Par cette substitution la forme quadratique sous les signes sommes devient une forme quadratique de l, $\frac{\partial l}{\partial u}$ et $\frac{\partial l}{\partial v}$ ou de $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3$.

Ainsi, on aura de (13)

$$(14) \qquad 0 = \iint \{ \Sigma (\bar{A}_{\mu\nu} + \bar{A}'_{\mu\nu}) \tau'_\mu \tau'_\nu \} du dv.$$

Les $\bar{A}_{\mu\nu}$ sont indépendantes de l et de ses dérivées et proviennent uniquement des $A_{\mu\nu}$ de l'équation (13). Les $\bar{A}'_{\mu\nu}$ sont des fonctions linéaires et homogènes de l, $\frac{\partial l}{\partial u}$, $\frac{\partial l}{\partial v}$ et de λ'.

Dans le mémoire précédent, nous avons vu que si la forme quadratique

$$\Sigma \bar{A}_{\mu\nu} \tau'_\mu \tau'_\nu$$

est définie, on peut toujours fixer une limite de l et de ses dérivées du premier ordre ainsi que de λ', de sorte que pour des valeurs de ces variables, qui sont inférieures à cette limite, la forme quadratique

$$\Sigma (\bar{A}_{\mu\nu} + \bar{A}'_{\mu\nu}) \tau'_\mu \tau'_\nu$$

soit aussi une forme définie.

Mais alors, il n'existe pas d'autre solution de l'équation (14) que

$$\tau'_1 = \tau'_2 = \tau'_3 = 0.$$

Par conséquent, la surface déjà trouvée est unique, c'est à dire, il n'existe pas d'autre surface, qui satisfait à une équation

$$G = 0$$

où la valeur de λ diffère très peu de celle de l'équation primitive, qui passe par le contour donné et pour laquelle les valeurs des coordonnées et de leurs premières dérivées dans chaque point diffèrent très peu des valeurs dans les points correspondants de la surface primitive.

Ainsi, il faut calculer la forme quadratique

$$\Sigma \bar{A}_{\mu\nu} \tau'_\mu \tau'_\nu$$

ou plutôt l'intégrale double

$$\iint \{\Sigma \bar{A}_{\mu\nu} \tau'_\mu \tau'_\nu\} du\, dv \tag{15}$$

pour reconnaître, si la forme quadratique sous les signes sommes est une forme définie, ou non. Nous avons vu que la forme quadratique en question provient uniquement des termes du premier ordre de l'expression

$$\xi \Delta \Gamma_1 + \eta \Delta \Gamma_2 + \zeta \Delta \Gamma_3.$$

Par conséquent, l'intégrale (15) n'est autre chose que l'intégrale

$$\iint \{\xi \partial \Gamma_1 + \eta \partial \Gamma_2 + \zeta \partial \Gamma_3\} du\, dv. \tag{16}$$

Dans la seconde partie du mémoire précédent nous avons fait le calcul d'une intégrale semblable, mais ce calcul étant assez pénible, il suffit de se rappeler les résultats qu'on y a obtenus. D'après les formules II (6), II (7) et II (17) on aura pour l'intégrale (16) l'expression

$$\iint \left\{ F_1 \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2 \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v} + F_4 w^2 \right\} du\, dv \tag{17}$$

où

$$w = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta,$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}, \qquad \beta = \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}, \qquad \gamma = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}.$$

Ensuite, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des facteurs, définis par les formules I (8), II (13) et II (14). Ils sont tous de la forme

$$F_1 = F_1^0 - \lambda F_1'.$$

On voit aisément que l'on a

$$w = k.l,$$
$$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

et, par conséquent, que w et l s'annullent en même temps.

La forme quadratique sous les signes sommes est définie, si dans le contour donné

$$(18) \qquad \begin{aligned} F_1 F_2 - F_3^2 &> 0, \\ F_1 F_4 &> 0, \end{aligned}$$

ou, la dernière condition n'étant pas remplie, s'il est possible de trouver deux fonctions finies et continues B et B_1 de sorte que

$$(19) \quad F_1 \left\{ (F_1 F_2 - F_3^2)\left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} + F_4\right) - F_1 B_1^2 + 2 F_3 B_1 B - F_2 B^2 \right\} > 0.$$

Nous avons transformé cette condition et nous avons vu qu'elle est toujours remplie, s'il existe une intégrale finie et continue de l'équation

$$(20) \qquad -\frac{\partial}{\partial u}\left(F_1 \frac{\partial U}{\partial u} + F_3 \frac{\partial U}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(F_2 \frac{\partial U}{\partial v} + F_3 \frac{\partial U}{\partial u}\right) + F_4 U = 0$$

qui ne s'annulle pas dans l'intérieur du contour d'intégration de l'intégrale (17). Ainsi, cette condition est suffisante mais nous n'avons pas démontré qu'elle est nécessaire comme dans le cas des maxima et des minima absolus. La démonstration appliquée dans ce cas n'est plus valable, car les variations ne sont pas libres; elles sont assujetties à la condition qu'elles ne changent pas la valeur de la seconde intégrale I'. Nous laissons, pourtant, ce point pour le moment.

Supposons, maintenant, que les conditions (18) et (19) soient remplies. Alors la forme quadratique sous les signes sommes de (17) est définie, et d'après ce que nous avons déjà dit, la surface est unique dans la signification que nous avons donné à ce mot. Mais, comme les fonctions

F_1, F_2, F_3, F_4 sont des fonctions continues de x, y, z et de leurs dérivées, on voit, aisément, que les conditions précédentes sont aussi remplies pour chaque autre surface qui diffère très peu de la surface primitive. Ainsi, nous pouvons construire autour de celle-ci une certaine aire, de sorte que, si nous y prenons un contour arbitraire et qu'il existe une surface qui satisfasse à une équation

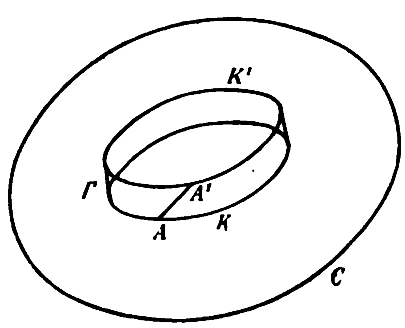
$$G = 0$$

qui passe par ce contour et qui diffère très peu de la surface primitive, cette nouvelle surface soit aussi unique. La valeur de λ dans l'équation $G = 0$ n'est pas nécessairement la même que dans l'équation qui nous donne la surface primitive; elle peut aussi en différer un peu.

Dans le cas des maxima et minima absolus, nous avons donné encore une condition pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum, qui nous servait à distinguer un maximum d'un minimum. Dans le cas actuel, nous allons procéder de la même manière. Nous appelons chaque équation

$$G = 0,$$

où λ diffère très peu de la valeur primitive, une équation G et aussi chaque surface, qui satisfait à une telle équation, une surface G. Sur la surface G, qui passe par le contour donné C nous traçons un certain contour fermé K. Par ce contour K nous faisons passer une surface quelconque et sur cette surface Γ nous traçons un autre contour K', très voisin du contour K et qui ne le coupe pas, et supposons qu'il existe une surface G, qui passe par K'. Il existe évidemment une infinité de tels contours K' sur la surface Γ. Nous avons vu qu'il n'est pas nécessaire de supposer que les contours K et K' et la surface Γ soient réguliers. Ils peuvent aussi être composés d'un nombre fini de parties régulières. Il faut seulement que les deux contours ne se coupent pas.



Considérons l'intégrale I^0 étendue sur la partie extérieure du contour K de la surface primitive, sur la partie de la surface Γ, qui est située entre les contours K et K', et, enfin, sur la surface G, qui passe par le contour K'. Cette intégrale, que nous appelons $\bar{I}^0$, peut être considérée comme une variation de l'intégrale I^0, étendue sur la surface primitive. D'après les formules III (1) et III (2), on aura

$$\Delta I^0 = \bar{I}^0 - I^0 = \int_K \mathcal{E}^0 l \sin\omega\, ds + \iint_K G^0 w\, du\, dv + (l)_2. \tag{21}$$

Ici, la fonction $\mathcal{E}^0$ est définie par les formules III (16) ou III (22). Ensuite, l est la longeur de la projection de la distance AA' sur le plan tangent de la surface Γ dans le point A, ω l'angle que fait cette projection avec la tangente de K dans ce point, et enfin ds l'élément de l'arc de K.

Mais les variations de la surface primitive doivent être telles, que la seconde intégrale I' ne change pas sa valeur. Alors, en formant la même différence pour l'intégrale I', on aura

$$0 = \Delta I' = \int_K \mathcal{E}' l \sin\omega\, ds + \iint_K G' w\, du\, dv + (l)_2 + \ldots \tag{22}$$

Multiplions l'équation (22) par $-\lambda$ et ajoutons le produit à l'équation (21). Nous aurons

$$\Delta I^0 = \int_K (\mathcal{E}^0 - \lambda\mathcal{E}') l \sin\omega\, ds + \iint_K (G^0 - \lambda G') w\, du\, dv + (l)_2 + \ldots$$

ou, en remarquant que

$$G^0 - \lambda G' = G = 0$$

et en introduisant la notation

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 - \lambda\mathcal{E}',$$

$$\Delta I^0 = \int_K \mathcal{E} l \sin\omega\, ds + (l)_2 + \ldots \tag{23}$$

Mais, pour que la surface primitive rende, réellement, l'intégrale I^0 un

maximum ou un minimum, il faut que pour chaque contour K et chaque surface Γ la différence ΔI^0 ne change jamais son signe. Ainsi

$$\Delta I^0 < 0 \quad \text{pour un maximum}$$

$$\Delta I^0 > 0 \quad \text{pour un minimum.}$$

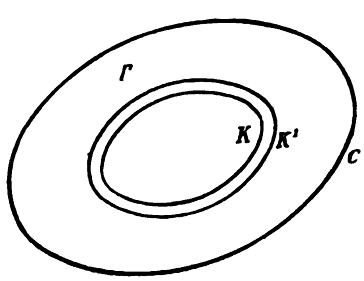
Pour des valeurs assez petites de l le signe du second membre (23) dépend du signe de son premier terme, l'intégrale

$$\int_K \mathfrak{E} l \sin \omega \, ds,$$

et pour que cette intégrale conserve toujours le même signe, quels que soient le contour K et la surface Γ, il faut que la fonction $\mathfrak{E}$ ne change jamais son signe. La nouvelle condition nécessaire pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum est, par conséquent, pour le cas d'un maximum, que la fonction $\mathfrak{E}$ ne devienne jamais positive et pour le cas d'un minimum que la fonction $\mathfrak{E}$ ne devienne jamais négative.

D'après la dernière forme que nous avons donnée à la fonction $\mathfrak{E}$ III (22), il suit que, la condition III (23) remplie, elle ne s'annulle que si la surface Γ est tangente à la surface G le long du contour K. Dans le cas où la condition III (23) n'est pas remplie, il faut faire une recherche spéciale.

Supposons maintenant que les conditions (18) et (19) soient remplies et que la fonction $\mathfrak{E}$ ne change pas son signe. Alors, nous pouvons entourer la surface primitive d'une aire telle que dans celle-ci pour chaque contour il n'existe qu'une seule surface G, qui diffère très peu de la surface primitive et en la resserrant, s'il le faut, telle que la fonction $\mathfrak{E}$ conserve le même signe pour ces nouvelles surfaces. Certainement, cela arrive, si la condition III (23) est remplie.



Imaginons, ensuite, dans l'aire A une surface Γ, régulière ou du moins composée d'un nombre fini de surfaces régulières qui passe par le contour primitif C, et sur Γ deux contours K et K' très voisins qui ne se coupent pas. Supposons que les deux contours soient tels qu'il existe des surfaces G, qui passent par ces contours et qui diffèrent

très peu de la surface primitive. Évidemment K et K' ne sont pas arbitraires, mais il en existe toujours une infinité. Cela résulte immédiatement d'une considération géometrique. Comme la surface Γ est située dans l'aire A, il suit qu'il n'existe qu'une seule surface G pour chacun des deux contours K et K'.

Considérons, ensuite, l'intégrale I^0 étendue d'abord sur la partie de Γ, au dehors de K', puis sur la surface G qui passe par K'. En appelant Ω la partie de Γ dans l'intérieure de K et $\partial\Omega$ la partie entre K et K', nous désignons notre intégrale I^0 par

$$I^0(\Omega + \partial\Omega).$$

De même, nous désignerons l'intégrale I^0, étendue sur la partie de Γ au dehors de K et sur la surface G qui passe par K, par

$$I^0(\Omega).$$

D'après ce que nous avons dit, les deux fonctions $I^0(\Omega + \partial\Omega)$ et $I^0(\Omega)$ sont complètement définies. On aura donc

$$I^0(\Omega + \partial\Omega) - I^0(\Omega) = \iint\limits_{K'} F^0 du\,dv - \iint\limits_{K} F^0 du\,dv - \iint\limits_{K}^{K} F^0 du\,dv.$$

On voit, facilement, que le second membre peut s'écrire de la manière suivante

$$(24)\quad I^0(\Omega + \partial\Omega) - I^0(\Omega) = -\int\limits_K \mathcal{E}^0 l \sin\omega\, ds - \iint\limits_K G^0 w\, du\, dv + (l)_2 + \ldots$$

Formons la même différence pour la seconde intégrale I'. Nous aurons

$$I'(\Omega + \partial\Omega) - I'(\Omega) = -\int\limits_K \mathcal{E}' l \sin\omega\, ds - \iint\limits_K G' w\, du\, dv + (l)_2.$$

Or, l'intégrale I' doit toujours conserver la même valeur pour toutes les variations en question. Par conséquent, on a

$$(25)\qquad 0 = -\int\limits_K \mathcal{E}' l \sin\omega\, ds - \iint\limits_K G' w\, du\, dv + (l)_2 + \ldots$$

Multiplions l'équation (25) par la valeur de λ qui appartient à la surface

G qui passe par K, et ajoutons le produit à l'équation (24). L'intégrale double disparait, et il reste

$$(26) \qquad I^0(\Omega + \partial\Omega) - I^0(\Omega) = -\int_K \mathcal{E} l \sin\omega \, ds + (l)_2 + \dots$$

Supposons que la fonction $\mathcal{E}$ ne devienne jamais négative. Alors, il suit de l'équation (26) que l'intégrale $I^0(\Omega)$ va toujours en décroissant, si Ω va en croissant et, par conséquent, que $I^0(\Omega)$ atteint sa plus petite valeur, quand le contour K atteint le contour primitif C. Mais, alors, l'intégrale $I^0(\Omega)$ devient

$$I^0(\Omega) = \iint_G F^0 du\, dv,$$

où l'intégration est étendue sur la surface primitive G qui passe par le contour C. De l'autre côté on a

$$I^0(0) = \iint_\Gamma F^0 du\, dv$$

et par conséquent

$$(27) \qquad \iint_G F^0 du\, dv < \iint_\Gamma F^0 du\, dv.$$

Ce raisonnement exige que la fonction $\mathcal{E}$ ne soit pas identiquement nulle sur la surface Γ, mais, il est facile de s'assurer que cela n'est pas possible, en suivant les mêmes considérations que dans le cas des maxima et des minima absolus.

On démontre aussi de la même manière qu'auparavant que l'inégalité (27) subsiste encore, si la surface Γ est tout à fait irrégulière, pourvue que les intégrales I^0 et I' aient un sens defini. L'existence d'un minimum est donc établie. De la même manière on démontre l'existence d'un maximum si la fonction $\mathcal{E}$ ne devient jamais positive. Ainsi, nous sommes arrivés au résultat suivant: L'intégrale I^0 devient un maximum ou un minimum en même temps que l'intégrale I' a une valeur donnée, si les conditions (18) et (19) sont remplies et que la fonction $\mathcal{E}$ conserve le même signe pour la surface donnée par l'équation

$$G = 0$$

à savoir, un minimum si la function $\mathcal{E}$ ne devient jamais négative et un maximum si la fonction $\mathcal{E}$ ne devient jamais positive.

Il y a, pourtant, une circonstance à se rappeler. La démonstration précédente repose, évidemment, sur le fait que la fonction $I^0(\Omega)$ est complètement déterminée, quand le contour K est fixé. Mais, cela n'est vrai que quand nous nous bornons à considérer de telles surfaces G, où non seulement les valeurs des coordonnées d'un point quelconque mais aussi de leurs dérivées du premier ordre diffèrent très peu des valeurs dans le point correspondant de la surface primitive. Par conséquent, nous n'avons établi la propriété maximale ou minimale de la surface que dans le cas où non seulement les variations mais aussi leurs dérivées du premier ordre sont infiniment petites.

Jusqu'ici, nous n'avons pas imposé aux variations ξ, η, ζ de la surface cherchée d'autres restrictions que celle que la valeur de la seconde intégrale I' doit être invariable. Mais, il est facile d'en imposer d'autres. Ainsi, on peut demander que la surface cherchée soit renfermée dans une certaine partie de l'espace, limitée par une surface fermée. Alors, il peut arriver que la surface cherchée rencontre la surface de la limite. Dans ses recherches sur le célèbre problème isopérimétrique dans le plan, STEINER a énoncé les deux théorèmes suivants.

»Si la courbe cherchée coïncide dans une partie finie avec la courbe de limite, les deux courbes se touchent dans les deux points de rencontre.»

»Si la courbe cherchée rencontre la courbe de limite dans un seule point, et que l'on néglige les variations où la courbe ne rencontre pas la limite, les tangentes des deux branches forment dans le point de rencontre des angles égaux avec la tangente de la courbe de limite.»

STEINER a trouvé ces deux théorèmes par une méthode synthétique, et il prétend même que le Calcul des Variations ne possède pas les moyens pour les démontrer. M. WEIERSTRASS a réfuté cela, en démontrant deux théorèmes généraux, dans la théorie des maxima et des minima des intégrales simples, dont ceux de STEINER sont des cas spéciaux.

Nous allons démontrer pour les intégrales doubles deux théorèmes analogues aux théorèmes de STEINER.

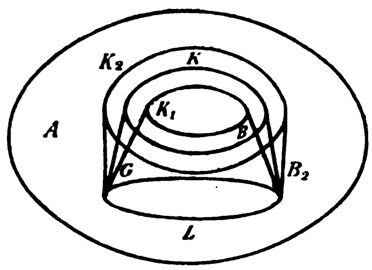
Soit I^0 l'intégrale double dont nous cherchons le maximum ou le minimum sous les conditions que l'intégrale I' conserve sa valeur et que la surface cherchée reste toujours dans l'intérieure d'une certaine partie

de l'espace, limitée par la surface fermée A. Supposons que nous ayons trouvé une surface qui satisfait à l'équation

$$G = 0$$

et que cette surface G coupe la surface A suivant un certain contour K qui peut être fermé ou non.

Prenons sur la surface A deux contours K_1 et K_2 très voisins de K et qui ne le coupent pas, ensuite sur la surface G un contour L. Faisons passer par L et K_1 et par L et K_2 deux surfaces arbitraires très voisines de G.



Sur la surface G entre L et K il peut y avoir des lignes de discontinuité, mais alors, il faut que suivant celles-ci les conditions (8) soient remplies.

Calculons maintenant la variation de l'intégrale I^0, si nous intégrons sur la surface B_2 et la partie de A qui est située dans l'intérieure de K_2, au lieu d'intégrer sur la surface G et la partie de A correspondante.

D'après les formules (21), (22) et (23) on aura

$$\Delta I^0 = \int_K \mathcal{E}\, l \sin\omega\, ds + (l)_2 + \ldots; \tag{28}$$

de même si nous remplaçons B_2 par B_1

$$\Delta I^0 = \int_K \mathcal{E}\, l_1 \sin\omega_1\, ds + (l_1)_2 + \ldots \tag{29}$$

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un minimum. Alors, nous avons trouvé comme condition nécessaire que la fonction $\mathcal{E}$ ne devienne jamais négative. On a ensuite dans (28)

$$l > 0, \qquad \sin\omega > 0,$$

mais alors, on voit qu'en posant dans (29)

$$l_1 > 0$$

on a nécessairement

$$\sin \omega_1 < 0.$$

Par conséquent, pour que la variation totale ΔI^0 ne change pas son signe, il faut que nous ayons

$$\mathcal{E} = 0$$

le long du contour K. Mais nous avons vu que si la condition III (23) est remplie

$$F_3^{(\bar{\mu})2} - F_1^{(\bar{\mu})} F_2^{(\mu)} < 0$$

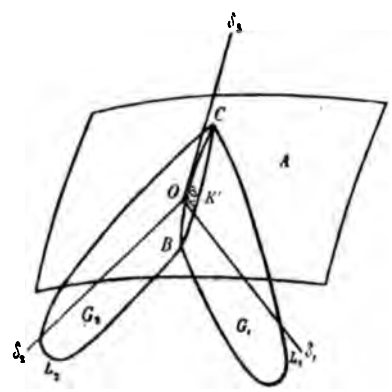
la fonction $\mathcal{E}$ ne s'annulle que pour le cas où les deux surfaces G et A sont tangentes le long du contour K.

Voilà, justement, la généralisation du premier théorème de Steiner au cas des intégrales doubles.

Passons maintenant au second théorème. Supposons que nous ayons trouvé comme solution de notre problème que la surface G, qui satisfait à l'équation

$$G = 0,$$

soit composée de deux parties différentes G_1 et G_2 qui se coupent le long d'une certaine courbe K sur la surface A. Prenons deux points quelconques B et C de la courbe K et traçons sur A entre B et C une nouvelle courbe K'. Ensuite, sur les surfaces G_1 et G_2 deux courbes L_1 et L_2. Faisons passer par L_1 et K' une surface arbitraire Γ_1, très voisine de G_1 et telle que l'intégrale I' ne change pas sa valeur, si l'on intègre sur la surface Γ_1 au lieu de sur la surface G_1. Enfin, par L_2 et K' une autre surface arbitraire Γ_2, qui a des propriétés analogues à celles de la surface Γ_1.



Appelons I_1^0 et I_2^0 les valeurs de l'intégrale I^0 étendue sur les surfaces G_1 et G_2 respectivement, et de même $\bar{I}_1^0$ et $\bar{I}_2^0$ les valeurs correspondantes sur les surfaces Γ_1 et Γ_2. Indiquons aussi par les indices 1 et 2, si les valeurs des coordonnées x, y, z ou de leurs dérivées se rapportent à la surface G_1 ou à la surface G_2.

D'après la formule I (5) nous aurons

$$\bar{I}_1^0 - I_1^0 = \int\limits_K \left\{ \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x_1'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y_1'} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z_1'} \right] \frac{\partial v}{\partial s} - \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x_1''} + \eta \frac{\partial F}{\partial y_1''} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z_1''} \right] \frac{\partial u}{\partial s} \right\} ds + (\ldots)_2$$

car l'intégrale double disparaît, parce que l'intégration est étendue sur la surface G_1. De même

$$\bar{I}_2^0 - I_2^0 = -\int\limits_K \left\{ \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x_2'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y_2'} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z_2'} \right] \frac{\partial v}{\partial s} - \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x_2''} + \eta \frac{\partial F}{\partial y_2''} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z_2''} \right] \frac{\partial u}{\partial s} \right\} ds + (\ldots)_2.$$

Il faut prendre le signe — pour que l'intégrale simple soit prise dans le même sens. Ainsi, en posant

$$\Delta I^0 = \bar{I}_1^0 + \bar{I}_2^0 - I_1^0 - I_2^0,$$

on aura

$$(30) \quad \Delta I^0 = \int\limits_K \left\{ \left[\xi \left(\frac{\partial F}{\partial x_1'} - \frac{\partial F}{\partial x_2'} \right) + \eta \left(\frac{\partial F}{\partial y_1'} - \frac{\partial F}{\partial y_2'} \right) + \zeta \left(\frac{\partial F}{\partial z_1'} - \frac{\partial F}{\partial z_2'} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial s} - \left[\xi \left(\frac{\partial F}{\partial x_1''} - \frac{\partial F}{\partial x_2''} \right) + \eta \left(\frac{\partial F}{\partial y_1''} - \frac{\partial F}{\partial y_2''} \right) + \zeta \left(\frac{\partial F}{\partial z_1''} - \frac{\partial F}{\partial z_2''} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial s} \right\} ds + (\xi, \eta, \zeta, \ldots)_2.$$

Pour transformer cette intégrale simple nous introduisons un nouveau système de coordonnées dans un point quelconque O de la courbe K. Comme l'axe des (δ_3) nous choisissons la tangente de la courbe K, ensuite, comme l'axe des (δ_1) la normale de la courbe K qui est située dans le plan tangent de la surface G_1 et, enfin, comme l'axe des (δ_2) la normale de la courbe K, qui est située dans le plan tangent de la surface G_2.

Les cosinus directeurs que font ces axes de coordonnées avec les axes des X, Y et Z sont, respectivement,

Pour l'axe des (δ_1)

$$\cos\alpha_1'', \qquad \cos\beta_1'', \qquad \cos\gamma_1''.$$

Pour l'axe des (δ_2)

$$\cos\alpha_2'', \qquad \cos\beta_2'', \qquad \cos\gamma_2''.$$

Pour l'axe des (δ_3)

$$\cos\alpha', \qquad \cos\beta', \qquad \cos\gamma'.$$

Au point O de la courbe K correspond un point O' de la courbe K', dont les coordonnées sont

$$x+\xi, \qquad y+\eta, \qquad z+\zeta.$$

Soit δ_1, δ_2, δ_3 les coordonnées de O' dans le nouveau système, nous aurons

$$\begin{aligned}
\xi &= \delta_1\cos\alpha_1''+\delta_2\cos\alpha_2''+\delta_3\cos\alpha',\\
\eta &= \delta_1\cos\beta_1''+\delta_2\cos\beta_2''+\delta_3\cos\beta',\\
\zeta &= \delta_1\cos\gamma_1''+\delta_2\cos\gamma_2''+\delta_3\cos\gamma'.
\end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs de ξ, η, ζ dans la formule (30), la quantité sous le signe somme devient

$$\begin{aligned}
&\delta_1\Bigg\{\left[\cos\alpha_1''\left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}-\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)+\cos\beta_1''\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}-\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right)+\cos\gamma_1''\left(\frac{\partial F}{\partial z_1'}-\frac{\partial F}{\partial z_2'}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial s}\\
&\qquad-\left[\cos\alpha_1''\left(\frac{\partial F}{\partial x_1''}-\frac{\partial F}{\partial x_2''}\right)+\cos\beta_1''\left(\frac{\partial F}{\partial y_1''}-\frac{\partial F}{\partial y_2''}\right)+\cos\gamma_1''\left(\frac{\partial F}{\partial z_1''}-\frac{\partial F}{\partial z_2''}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial s}\Bigg\}\\
&+\delta_2\Bigg\{\left[\cos\alpha_2''\left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}-\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)+\cos\beta_2''\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}-\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right)+\cos\gamma_2''\left(\frac{\partial F}{\partial z_1'}-\frac{\partial F}{\partial z_2'}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial s}\\
&\qquad-\left[\cos\alpha_2''\left(\frac{\partial F}{\partial x_1''}-\frac{\partial F}{\partial x_2''}\right)+\cos\beta_2''\left(\frac{\partial F}{\partial y_1''}-\frac{\partial F}{\partial y_2''}\right)+\cos\gamma_2''\left(\frac{\partial F}{\partial z_1''}-\frac{\partial F}{\partial z_2''}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial s}\Bigg\}\\
&+\delta_3\Bigg\{\left[\cos\alpha'\left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}-\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)+\cos\beta'\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}-\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right)+\cos\gamma'\left(\frac{\partial F}{\partial z_1'}-\frac{\partial F}{\partial z_2'}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial s}\\
&\qquad-\left[\cos\alpha'\left(\frac{\partial F}{\partial x_1''}-\frac{\partial F}{\partial x_2''}\right)+\cos\beta'\left(\frac{\partial F}{\partial y_1''}-\frac{\partial F}{\partial y_2''}\right)+\cos\gamma'\left(\frac{\partial F}{\partial z_1''}-\frac{\partial F}{\partial z_2''}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial s}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Le coefficient de ∂_3 s'annulle d'après les formules III (8) et I (4). Ensuite on a pour le coefficient de ∂_1 d'après la formule III (16) l'expression

$$-\mathcal{E}_2 = -\mathcal{E}(x, y, z, x_2', y_2', z_2', x_2'', y_2'', z_2'', x_1', y_1', z_1', x_1'', y_1'', z_1'').$$

Enfin, pour le coefficient de ∂_2 on a

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(x, y, z, x_1', y_1', z_1', x_1'', y_1'', z_1'', x_2', y_2', z_2', x_2'', y_2'', z_2'').$$

Par conséquent, on aura

$$\Delta I^0 = \int_K (\mathcal{E}_1\partial_2 - \mathcal{E}_2\partial_1)\, ds + (\ldots.)_2.$$

Mais, l'intégration est étendue sur une partie arbitraire de la courbe K. Donc, pour que la variation totale ΔI^0 conserve toujours un signe invariable, il faut que la fonction sous le signe somme

$$\mathcal{E}_1\partial_2 - \mathcal{E}_2\partial_1$$

conserve toujours un signe invariable. Mais, cette quantité représente à un facteur près, qui n'est pas nul, la distance du point O' au plan

$$\mathcal{E}_1\partial_2 - \mathcal{E}_2\partial_1 = 0.$$

Il faut donc que le point O' soit toujours situé du même côté de ce plan. Le point O' appartient à la surface A et, par conséquent, le plan

$$\mathcal{E}_1\partial_2 - \mathcal{E}_2\partial_1 = 0$$

doit être le plan tangent de la surface A au point O.

Ensuite soient a_1 et a_2 les angles que font les axes (∂_1) et (∂_2) avec le plan

$$\mathcal{E}_1\partial_2 - \mathcal{E}_2\partial_1 = 0,$$

ces angles étant comptés dans des directions opposées, on aura

$$\frac{\partial_1}{\partial_2} = \frac{\sin a_2}{\sin a_1}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin a_2}{\sin a_1} = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2}.$$

Mais les axes ∂_1 et ∂_2 sont situés dans les plans tangents des surfaces G_1 et G_2 et sont, d'ailleurs, des normales de la courbe K. On peut donc énoncer le théorème suivant:

»Si les deux surfaces G_1 et G_2 se coupent le long d'une courbe K tracée sur la surface A, il faut, pour qu'un maximum ou un minimum soit possible, que les sinus des angles, que font les plans tangents des surfaces G_1 et G_2 avec le plan tangent de la surface A au même point, soient proportionels aux fonctions $\mathfrak{G}_2$ et $\mathfrak{G}_1$, ces angles étant comptés dans des directions opposées.»

On reconnaît facilement que ces deux théorèmes correspondent aux deux théorèmes donnés par M. WEIERSTRASS dans la théorie des maxima et minima des intégrales simples, dont ceux de STEINER sont des cas spéciaux.

ENTWICKLUNGEN ZUR TRANSFORMATION FÜNFTER UND SIEBENTER ORDNUNG EINIGER SPECIELLER AUTOMORPHER FUNCTIONEN

VON

ROBERT FRICKE
in GÖTTINGEN.

In den nachfolgenden Zeilen erlaube ich mir den Lesern der Acta mathematica einen Beitrag zur Theorie jener eindeutigen Functionen einer complexen Veränderlichen vorzulegen, welche von einem Teile der dabei interessierten Mathematiker als »automorphe Functionen» bezeichnet werden. Es sei gestattet, hier am Eingang der Kürze halber nur auf die grossen Abhandlungen Bezug zu nehmen, welche POINCARÉ in den ersten Bänden der vorliegenden Zeitschrift über die gedachten Functionen veröffentlichte; es lassen sich nämlich eben von diesen Abhandlungen aus die für das Folgende massgeblichen Gesichtspunkte von vornherein am deutlichsten angeben.

Es scheint, dass der von POINCARÉ gewählte Eingang in die Theorie wenigstens der »eindeutigen» automorphen Functionen der unmittelbarste ist; ich meine jene Methode, die Untersuchung automorpher Functionen auf das vorangegangene Studium der zugehörigen Gruppen linearer Substitutionen der Veränderlichen zu basieren, diese Gruppe selbst aber eben durch »Angabe ihrer Substitutionen» als definiert anzusehen. Bei jenem ersten Forschungsgange hatte nun POINCARÉ nur est ganz nebenher das Problem berührt, wie man Gruppen unserer Art etwa durch erschöpfende Angabe der Bildungsgesetze ihrer Substitutionscoefficienten thatsächlich her-

zustellen vermöchte; vielmehr galt es in erster Linie, die Summe der allgemein möglichen Folgerungen aus der Angabe einer fraglichen Gruppe zu ziehen, unangesehen alle jene Ergebnisse, die aus dem besonderen Bildungsgesetz der einzelnen Gruppe entspringen mögen.

In Anbetracht dieser letzteren Verhältnisse muss das Beispiel der Modulfunctionen vorbildlich sein. Weil nämlich dort die Gruppe von dem bekannten einfachen Bildungsgesetze vorlag, war es möglich für die zugehörigen Functionen jene weitverzweigte Theorie durchzubilden, welche den besonderen Namen der Theorie der elliptischen Modulfunctionen trägt. Hierüberhinaus ist es das Bestreben des Verfassers gewesen, auch für andere Gruppen von einem fest gefügten arithmetischen Bildungsgesetze auszugehen, und es sind in dieser Hinsicht eine Reihe von Ansätzen in den neueren Bänden der Mathematischen Annalen (von Band 38 an) sowie in den Göttinger Nachrichten vom vorigen Jahre veröffentlicht.

In dem vorliegenden Aufsatze wollte ich die bezeichneten Ansätze in das functionentheoretische Gebiet hinein verfolgen, um solcherweise ihre Tragweite nach dieser Richtung hin darzuthun. Dabei schränke ich mich von vornherein auf denkbar einfache Verhältnisse ein, um einerseits die darzulegenden Gesichtspunkte an möglichst elementaren Vorstellungen zu entwickeln, und um andererseits unmittelbaren Anschluss an gewisse bekannte functionentheoretisch-geometrische Entwicklungen zu gewinnen. In der That werden wir späterhin Gelegenheit finden, die Resultate älterer Arbeiten von Klein und Gordan für unsere Zwecke zu benutzen, Arbeiten, die einmal die Ikosaedertheorie sodann die bei der Transformation 7^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen auftretende Gruppe 168ster Ordnung betreffen. Die näheren Literaturangaben sollen überall im Laufe des nachfolgenden Textes nachgetragen werden.

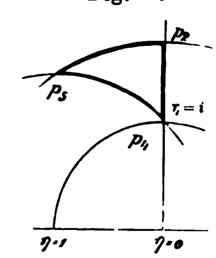
ERSTER TEIL.

Entwicklungen über die Dreiecksfunctionen von den Verzweigungen (2, 4, 5), (2, 5, 6).

§ 1. *Das arithmetische Bildungsgesetz der zum Kreisbogendreieck (2, 4, 5) gehörenden Gruppe.*

In der Ebene der complexen Veränderlichen η sei ein von Kreisbogen begrenztes Dreieck gezeichnet, welches die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$ darbietet; die Ecken des Dreiecks nennen wir in sofort verständlicher Zuordnung p_2, p_4, p_5, und dem entsprechend mögen die Seiten $(p_2, p_4), (p_4, p_5), (p_5, p_2)$ heissen. Das Dreieck habe die in Fig. 1 gezeichnete Lage; es soll also der Punkt p_4 mit $\eta = i$ coincidieren, während die Seite (p_4, p_2) auf die imaginäre Axe oberhalb $\eta = i$ zu liegen kommt. Das in Rede stehende Kreisbogendreieck soll kurz als Dreieck (2, 4, 5) bezeichnet werden; es ist in der Figur zugleich so angenommen, dass seine drei begrenzenden Kreise bei Verlängerung die reelle η-Axe unter rechten Winkeln schneiden.

Fig. 1.



Auf das beschriebene Dreieck (2, 4, 5) wenden wir jetzt das von SCHWARZ ausgebildete Symmetrieprincip[1] an und gewinnen eine bekannte Dreieckseinteilung der oberhalb der reellen Axe gelegenen »positiven η-Halbebene». Die Dreiecke sind abwechselnd durch indirecte und directe Kreisverwandtschaft[2] mit einander aequivalent, und die li-

[1] Wegen des Näheren über diesen Gegenstand darf ich auf die von KLEIN und mir verfassten *Vorlesungen über elliptischen Modulfunctionen,* I, pag. 85 ff. verweisen; ich citiere dieses Werk in der Folge kurz als M. I oder M. II je nach dem gerade gemeinten Bande.

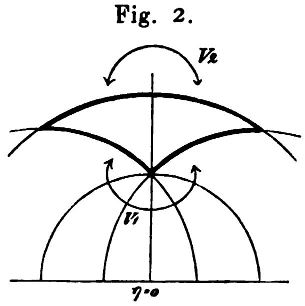
[2] M. I, pag. 88.

nearen η-Substitutionen, welche diese Kreisverwandtschaften analytisch darstellen, bilden die Gruppe, die hier näher untersucht werden soll.

Wollen wir zuvörderst nur mit directen Kreisverwandtschaften zu thun haben, so müssen wir etwa dem Dreieck der Fig. 1 sein durch Symmetrie längs der imaginären Axe entworfenes Spiegelbild anfügen; es entspringt solchergestalt ein »Doppeldreieck», welches wir Δ_0 nennen. Indem wir je zwei im gleichen Sinne neben einander liegende Dreiecke der Halbebenenteilung zu Doppeldreiecken zusammenfügen, mögen wir die letzteren in irgend einer Folge $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ nennen. Die linearen η-Substitutionen, welche Δ_0 in die übrigen Doppeldreiecke transformieren, bilden die in Rede stehende Gruppe, welche $\Gamma(2, 4, 5)$ heisse; ihre Substitutionen, welche durchgehends die Gestalt $\eta' = \dfrac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ mit reellen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einer positiven Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ haben, sollen symbolisch durch $V_0 = 1$, V_1, $V_2, \ldots$ bezeichnet werden, und zwar transformiere V_k das Dreieck Δ_0 in Δ_k.

Als Fundamentalpolygon der Gruppe in KLEIN's Sinne[1] kann das Doppeldreieck Δ_0 angenommen werden. Die Randcurven sind dabei so zusammengeordnet wie Fig. 2 angiebt; die Gruppe $\Gamma(2, 4, 5)$ lässt sich demgemäss aus zwei Substitutionen erzeugen, und es seien dies, wie schon in Fig. 2 angedeutet, die Substitutionen V_1 und V_2. Beide sind elliptisch, und sie haben die Perioden 4 bez. 2;[2] die ausgerechneten Gestalten dieser erzeugenden Substitutionen der Gruppe sind aber:

Fig. 2.



$$(1) \qquad (V_1)\ \eta' = \frac{\eta + 1}{-\eta + 1}, \qquad (V_2)\ \eta' = -\frac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)\eta}.$$

[1] M. I, pag. 183; nach POINCARÉ's Benennung »polygone générateur», cf. Acta mathematica, Bd. 1, pag. 16.

[2] M. I, pag. 165.

Um diese Angaben zu belegen, bemerke man erstlich, dass die Substitutionscoefficienten hier überall reell sind, und dass V_1, wie es sein muss, $\eta = i$ zum Fixpunkt[1] hat, V_2 aber einen auf der imaginären Axe oberhalb $\eta = i$ gelegenen Punkt. Durch diese Lagenbeziehungen, sowie andrerseits durch die Forderungen, dass die Substitutionen V_1, V_2 und $V_1 V_2$ die Perioden 4, 2 und 5 haben müssen, sind, wie man leicht ins einzelne nachweist, V_1 und V_2 gerade in der unter (1) angegebenen Gestalt eindeutig bestimmt.

Aus der Gestalt der erzeugenden Substitutionen suchen wir nun auf das Bildungsgesetz der ganzen Gruppe zu schliessen. Hier lehrt nun erstlich V_2, dass sich die Substitutionscoefficienten aus *ganzen algebraischen Zahlen desjenigen reellen quadratischen Zahlkörpers*[2] aufbauen werden, dessen Basis $\left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ ist; dabei ist jedoch noch die *Quadratwurzel* aus der speciellen ganzen Zahl $P = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ dieses Körpers adjungiert zu denken. Die Substitutionscoefficienten werden somit die Gestalt darbieten:

$$\alpha = A + B\sqrt{P}, \qquad \beta = C + D\sqrt{P}\ , \quad \ldots, \tag{2}$$

wenn hierbei A, B, C, D *ganze* Zahlen des genannten Körpers sind.

Aus der Gestalt von V_1 und V_2 wollen wir noch ein zweites Gesetz für die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der zu betrachtenden Substitutionen ableiten. Nennen wir für den Augenblick die beiden reellen Zahlen $(A \pm B\sqrt{P})$ conjugiert, *so sollen α und δ, sowie β und $-\gamma$ jeweils conjugiert sein.* Von diesem, bei V_1 und V_2 thatsächlich vorliegenden Bildungsgesetze zeigt man nun durch einfache Ausrechnung, dass es bei Combination von Substitutionen unzerstörbar ist: *Alle Substitutionen von $\Gamma(2, 4, 5)$ werden somit den Typus:*

$$\eta' = \frac{(A + B\sqrt{P})\eta + (C + D\sqrt{P})}{(-C + D\sqrt{P})\eta + (A - B\sqrt{P})} \tag{3}$$

aufweisen müssen.[3]

---

[1] M. I, pag. 164; »point double» bei POINCARÉ.

[2] Wegen der zu benutzenden arithmetischen Begriffsbestimmungen vergleiche man die »Allgemeine Zahlentheorie» DEDEKIND's im Supplement XI von DIRICHLET's *Vorlesungen über Zahlentheorie*, (3te Auflage).

[3] Die allgemeine Tragweite des in der Substitutionsform (3) liegenden Ansatzes findet man in den Mathem. Annalen, Bd. 42, pag. 564 discutiert.

Aber es gehören noch keineswegs alle Substitutionen (3), die wir zu bilden vermögen, der Gruppe $\Gamma(2, 4, 5)$ an; vielmehr treten neue Einschränkungen ein, und diese letzteren haben wir im Anschluss an den Modul oder die Determinante der Substitution:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = A^2 - PB^2 + C^2 - PD^2 \tag{4}$$

zu beschreiben. Die in der Folge zu brauchenden Zahlwerte der Verbindung (4) sollen auf 1, 2 und 4 eingeschränkt bleiben, und wir sprechen demgemäss von *unimodularen* bez. *duomodularen* und *quadrimodularen* Substitutionen (3). Der arithmetische Charakter der anfänglich vorgelegten Gruppe ist dann in einfachster Weise dahin zu formulieren, *dass sie aus allen duo- und quadrimodularen Substitutionen* (3) *besteht.* Wir wollen die so gemeinte Gruppe als die arithmetisch definierte $\Gamma(2, 4, 5)$ bezeichnen und ihre Identität mit der aus V_1, V_2 zu erzeugenden Gruppe von dreieckigem Fundamentalbereich nun im einzelnen nachweisen.

§ 2. *Identität der arithmetisch definierten* $\Gamma(2, 4, 5)$ *mit der Gruppe des Kreisbogendreiecks* (2, 4, 5).

Das System aller unimodularen Substitutionen (3) § 1, welche aus ganzen Zahlen A, B, C, D des öfter genannten Körpers unter der Voraussetzung $P = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ gebildet werden können, möge kurz durch Σ_1 bezeichnet werden, und wir brauchen weiter in sofort verständlichem Sinne die Bezeichnungen Σ_2 und Σ_4. Das System Σ_4 der quadrimodularen Substitutionen wird Σ_1 in sich enthalten, nur dass jede unimodulare Substitution mit 2 erweitert erscheint. Dass das System Σ_1 eine Gruppe vorstellt, ist unmittelbar evident; denn hier multiplicieren sich bei Combination zweier Substitutionen deren Determinanten. *Aber auch das System* Σ_4 *stellt eine Gruppe dar,* wo wir dann nach jedesmaliger Combination zweier Substitutionen den gemeinsamen Factor 2 aus allen vier Coefficienten müssen fortheben können, um solchergestalt zu einer quadrimodularen Substitution zurückzugelangen. Zum Beleg dieser Behauptung muss eine kurze arithmetische Betrachtung vorausgesandt werden.

Die Bedingung der quadrimodularen Substitutionen:

$$A^2 - PB^2 + C^2 - PD^2 = 4$$

liefert für die ganzen Zahlen A, B, C, D der einzelnen Substitution die nachfolgende Congruenz:

$$A^2 + C^2 \equiv P(B^2 + D^2), \text{ (mod. 4)}. \tag{1}$$

Es giebt nun im quadratischen Zahlkörper modulo 2 vier incongruente Zahlen, und also sind unter den 16 modulo 4 incongruenten Zahlen nur vier mod. 4 mit Quadraten congruent. Man wird sie als quadratische Reste von 4 bezeichnen und findet unter Gebrauch der Abkürzung:

$$a + b\frac{1+\sqrt{5}}{2} = (a, b)$$

für dieselben $(0, 0), (1, 1), (1, 0), (2, 3)$. Von hieraus berechnet man sofort weiter, dass unter den 16 Resten mod. 4 nur die zehn

$$(0,0), (0,2), (2,0), (2,2), (1,0), (1,1), (2,1), (2,3), (3,0), (3,3) \tag{2}$$

mod. 4 mit der Summe zweier Quadrate congruent sind. Multipliciert man diese zehn Zahlen mit $P \equiv (-1, 1)$ einzeln, so kommen einmal die vier ersten Zahlen (2) wieder zum Vorschein, ausserdem aber gerade die sechs in der Reihe (2) noch fehlenden Reste modulo 4. Zufolge (1) wird man sonach $B^2 + D^2$ nur mit einer der vier Zahlen $(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)$ mod. 4 identificieren können, worauf dann $P(B^2+D^2)$ d. h. A^2+C^2 wieder mit einer von diesen vier Zahlen congruent wird. Die vier ersten Zahlen (2) entstanden aber durch Verdoppelung eines quadratischen Restes von 4, und also ergiebt sich: *Bei den quadrimodularen Substitutionen bestehen immer die Congruenzen:*

$$A \equiv C, \qquad B \equiv D, \text{ (mod. 2)}, \tag{3}$$

und es giebt insgesamt nur vier modulo 2 incongruente quadrimodulare Substitutionen (3) § 1.

Mögen nun die beiden quadrimodularen V und V' durch Combination $V'' = VV'$ liefern, so wird man, um V'' auf die Determinante 4 zurückzubringen, die vier Coefficienten durch 2 teilen. Ordnen wir alsdann

V'' wieder in der Gestalt (3) § 1 an, so haben wir für die zu V'' gehörenden A'', B'', C'', D'', die entweder ganze Zahlen oder Hälften solcher sind, die Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} 2A'' = AA' + PBB' - CC' + PDD', \\ 2B'' = AB' + BA' + CD' - DC', \\ 2C'' = AC' + PBD' + CA' - PDB', \\ 2D'' = AD' + BC' - CB' + DA'. \end{cases}$$

Nun aber sind für V und V' die Congruenzen (3) in Gültigkeit, und also folgt aus (4) ohne weiteres, dass A'', B'', C'', D'' *ganze* Zahlen des quadratischen Körpers sind. V'' gehört somit wieder dem Systeme Σ_4 an, und dieses bildet also in der That eine Gruppe.

Die aus den quadrimodularen Substitutionen bestehende Gruppe wird durch die in § 1 mit V_1 bezeichnete Substitution in sich selbst transformiert,[1] indem man ohne Mühe die Gleichung:

$$V_1^{-1} V V_1 = \begin{pmatrix} A - D\sqrt{P}\,, & C + B\sqrt{P} \\ -C + B\sqrt{P}\,, & A + D\sqrt{P} \end{pmatrix}$$

verificiert, wo übrigens nur die vier Coefficienten der Substitution angegeben sind. Fügen wir sonach der Gruppe der quadrimodularen V noch alle diejenigen Substitutionen hinzu, welche durch Combination ihrer V mit V_1 in der Gestalt $V' = VV_1$ entspringen, so gelangen wir zu einer umfassenderen Gruppe, in welcher die aus dem System Σ_4 bestehende Gruppe eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2 ist.[2] Nun genügt aber die duomodulare Substitution V_1 ihrerseits auch der Bedingung (3). In den vier Coefficienten von $V' = VV_1$ tritt somit zufolge (4) der gemeinsame Factor 2 auf, nach dessen Forthebung wir in V' wieder eine ganzzahlige *duomodulare* Substitution gewinnen. Auf der anderen Seite lässt sich *jedes* duomodulare V' in der eben benutzten Gestalt VV_1 darstellen; denn $V'V_1$ ist quadrimodular und auch V_1^2 findet sich in Σ_4. *Die eben aufgestellte*

---

[1] M. I, pag. 261.

[2] M. I, pag. 308 ff.

Gruppe, die Σ_4 umfasst, besteht also aus Σ_4 und Σ_2 und liefert somit nach der Verabredung von § 1 *die »arithmetisch definierte» Gruppe:*

$$\Gamma(2, 4, 5) = \Sigma_2 + \Sigma_4.$$

Es ist nun weiter leicht beweisbar, *dass die Gruppe der duo- und quadrimodularen Substitutionen* (3) § 1 *eigentlich discontinuierlich ist.*[1] Man muss zu diesem Ende von der zu Grunde liegenden Gleichung:

$$A^2 - PB^2 + C^2 - PD^2 = 2 \text{ oder } 4 \tag{5}$$

zu derjenigen »conjugierten» Gleichung übergehen:

$$A'^2 - P'B'^2 + C'^2 - P'D'^2 = 2 \text{ oder } 4, \tag{6}$$

die einfach durch Zeichenwechsel von $\sqrt{5}$ aus (5) hervorgeht. Hier ist nun der Umstand besonders folgenreich, dass $P' = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ negativ und dem absoluten Werte nach grösser als 1 ist. Die Folge ist, dass bei den Substitutionen unserer Gruppe nur solche Zahlen A, B, C, D zur Geltung kommen, deren conjugierte Zahlen absolut < 2 sind. Nach einem bekannten Satze der Zahlentheorie[2] giebt es aber nur eine *endliche* Anzahl ganzer Zahlen eines Körpers n^{ten} Grades, die selbst samt ihren conjugierten Zahlen, absolut genommen, eine festgesetzte endliche Grenze nicht überschreiten. Es kann somit nur eine *endliche* Anzahl von Substitutionen in der Gruppe geben, deren vier Coefficienten dem absoluten Betrage nach eine beliebig zu wählende endliche Constante nicht übersteigen. Solches aber wäre unmöglich, wenn infinitesimale Substitutionen in der Gruppe vorkämen, und also ist nach der eben citierten Abhandlung POINCARÉ's die eigentliche Discontinuität der Gruppe evident.

Um das Fundamentalpolygon der Gruppe zu gewinnen, benutze ich eine Operationsweise, die bei ähnlichen Gelegenheiten immer eine bedeutende Erleichterung der Überlegung bewirkt. Die fragliche Massnahme besteht darin, dass die Gruppe durch Zusatz sogenannter Substitutionen zweiter Art, die indirecte Kreisverwandtschaften bedeuten, erweitert wird.[3]

[1] Siehe POINCARÉ, Acta mathematica, Bd. 3, pag. 57 ff.

[2] Siehe DIRICHLET-DEDEKIND, a. a. O., pag. 556.

[3] Siehe SCHWARZ in Bd. 70 des CRELLE'schen Journals, pag. 105, oder M. I, pag. 82 ff.

Hierher gehören vor allem die Transformationen durch reciproke Radien an Kreisen der η-Ebene, Operationen, die kurz als Spiegelungen bezeichnet werden. Bedeutet $\bar{\eta}$ der zu η conjugiert complexe Wert, so liefert der Übergang von η zu $\eta' = -\bar{\eta}$ die Spiegelung an der imaginären Axe. Indem wir diese besondere Spiegelung den bisherigen Substitutionen »erster« Art hinzufügen, gelangen wir zu einer *erweiterten Gruppe, wobei die duo- und quadrimodularen Substitutionen zweiter Art:*

$$\eta' = \frac{(A + B\sqrt{P})\bar{\eta} - (C + D\sqrt{P})}{(-C + D\sqrt{P})\bar{\eta} - (A - B\sqrt{P})} \tag{7}$$

als neu hinzukommen; es mögen diese Substitutionen kurz $\bar{V}$ genannt werden.

Von besonderer Wichtigkeit sind unter den Substitutionen (7) diejenigen, welche Spiegelungen darstellen; die Bedingung, damit dies vorliegt, ist $B = 0$,[1] und der zugehörige Spiegelkreis ist, wenn wir $\eta = x + iy$ setzen, gegeben durch:

$$(C - D\sqrt{P})(x^2 + y^2) + 2Ax - (C + D\sqrt{P}) = 0. \tag{8}$$

Diese Gleichungen aber sind anzusetzen, einmal für alle innerhalb des quadratischen Körpers ganzzahligen Auflösungen der ternären Gleichung:

$$4 = A^2 + C^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} D^2, \tag{9}$$

— und wir erhalten hier eine *erste Classe von Spiegelkreisen* — sodann aber für alle ganzzahligen Auflösungen von:

$$2 = A^2 + C^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} D^2, \tag{10}$$

womit wir die *zweite Classe der Spiegelkreise* erhalten.

Die Spiegelkreise (8) sind, wie man sieht, sämtlich orthogonal gegen die reelle Axe gerichtet, und nun gilt es einzusehen, *dass diese Kreise in ihrer Gesamtheit gerade jene Dreiecksteilung* (2, 4, 5) *der η-Halbebene bewirken, welche wir am Anfang vom Kreisbogendreieck* (2, 4, 5) *aus durch immer wiederholte Spiegelung herstellen.* Von hieraus ist es dann leicht, die Identität der arithmetisch definierten Gruppe mit der Gruppe des Kreisbogendreiecks (2, 4, 5) zu erkennen.

---

[1] Siehe etwa M. I, pag. 196 ff.

Zu diesem Ende muss man zuvörderst feststellen, welche Perioden bei den elliptischen Substitutionen unserer Gruppe vorkommen mögen Für eine elliptische Substitution der Periode ν ist

$$A = 2\cos\frac{\pi}{\nu} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{\nu}, \tag{11}$$

je nachdem eine quadrimodulare oder duomodulare Substitution vorliegt. Soll aber $2\cos\frac{\pi}{\nu}$ oder $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{\nu}$ eine ganze Zahl des für uns zu Grunde liegenden quadratischen Zahlkörpers sein, so ist nach elementaren Regeln ν auf die Werte $2, 3, 4, 5$ eingeschränkt; *es kommen also jedenfalls keine anderen als die Perioden:*

$$\nu = 2, 3, 4, 5 \tag{12}$$

bei den elliptischen Substitutionen der Gruppe vor. Die Perioden $2, 4, 5$ kommen auch sicher vor; denn sie sind in der Gruppe des Kreisbogendreiecks $(2, 4, 5)$ enthalten, die doch jedenfalls zufolge (1) § 1 sich in der arithmetisch definierten Gruppe vorfindet.

Man bemerke nun weiter, dass der Kreuzungspunkt zweier Symmetriekreise (8) immer den Fixpunkt für eine elliptische Substitution ergiebt, die durch Combination der beiden zugehörigen Spiegelungen entspringt. Es folgt, *dass jene Symmetriekreise einander nur unter Winkeln* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$ *oder Vielfachen derselben schneiden können.* Da wir nun mit einer eigentlich discontinuierlichen Gruppe zu thun haben, so liefern die sämtlichen Kreise (8) eine Einteilung der positiven Halbebene in lauter aequivalente Kreisbogenpolygone mit Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$.

Im weiteren Verfolg der geometrischen Verhältnisse innerhalb der η-Halbebene werden wir diejenige Maassbestimmung gebrauchen müssen, welche POINCARÉ für die Untersuchung der Gruppen reeller Substitutionen eingeführt hat.[1] Insbesondere ziehen wir die Formel für den Inhalt eines

[1] Siehe Acta mathematica, Bd. 1, pag. 6 ff. Die betreffende projective Maassbestimmung geht durch einen in M. I, pag. 239, geschilderten Projectionsprocess in diejenige Maassbestimmung über, welche KLEIN bei seinen bez. Untersuchungen (in Bd. 4 der Mathem. Annalen) der »hyperbolischen» Geometrie zu Grunde legt. Man vergl. übrigens auch CLEBSCH-LINDEMANN, Vorles. über Geometrie, Bd. 2, Abt. 1.

im Sinne der Maassbestimmung geradlinigen Polygons ohne entspringende Winkel heran; ist I dieser Inhalt, n aber die Anzahl der Polygonseiten und σ die Summe der Winkel, so lautet der Ausdruck für I:

$$I = 4k^2[(n-2)\pi - \sigma], \tag{13}$$

wo k eine für die Maassbestimmung charakteristische Constante ist.

Wir greifen nun ein einzelnes der aequivalenten Polygone unserer Halbebenenteilung auf und nehmen an, es sei ein n-eck mit λ Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\varkappa$ Winkeln $\frac{\pi}{3}$, μ Winkeln $\frac{\pi}{4}$ und endlich ν Winkeln $\frac{\pi}{5}$, so dass $\varkappa+\lambda+\mu+\nu=n$ ist. Unter den Spiegelkreisen der Gruppe finden sich jedenfalls alle Symmetriekreise der Dreiecksteilung $(2, 4, 5)$, und es möge das einzelne Dreieck $(2, 4, 5)$ aus m Polygone bezeichneter Art zusammengesetzt erscheinen. Alsdann gilt die Gleichung:

$$4mk^2[(n-2)\pi - \sigma] = \frac{4k^2\pi}{20}.$$

Setzt man hier für σ seinen Wert ein, so kommt nach leichter Umgestaltung:

$$m.[60(n-2) - (30\lambda + 20\varkappa + 15\mu + 12\nu)] = 3.$$

Hier steht aber links das Product zweier rationalen ganzen Zahlen; es sind also nur zwei Fälle möglich einmal $m = 3$, sodann $m = 1$.

Die Auswahl $m = 1$ liefert, falls wir noch für n seinen Wert als Summe der vier ganzen Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ eintragen:

$$20(n-2) - \left[10\lambda + 20\left(\frac{\varkappa}{3}\right) + 5\mu + 4\nu\right] = 1,$$

$$10\lambda + 40.\left(\frac{\varkappa}{3}\right) + 15\mu + 16\nu = 41,$$

woraus man zugleich ersieht, dass $\varkappa$ durch 3 teilbar sein muss. Es ist eine einfache zahlentheoretische Überlegung, welche zu dem Schlusse führt, dass die *einzige* Auflösung der letzten Gleichung in ganzen, nichtnegativen Zahlen $\lambda, \frac{\varkappa}{3}, \mu, \nu$ die folgende ist:

$$\varkappa = 0, \qquad \lambda = \mu = \nu = 1.$$

Hier hat man also $n = 3$, und zwar ein Dreieck der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$, und dies ist das Ausgangsdreieck der in § 1 besprochenen Halbebenenteilung, ein Resultat, welches ja nur in anderer Gestalt eine Bestätigung der Gleichung $m = 1$ liefert.

Prüfen wir nun den Fall $m = 3$, wo wir die diophantische Gleichung gewinnen:

$$40x + 30\lambda + 45\mu + 48\nu = 121.$$

Man stellt ohne Mühe fest, dass diese Gleichung eine Auflösung in ganzen, nicht-negativen Zahlen x, λ, μ, ν überhaupt nicht besitzt. Damit aber ist in der That evident, dass die Kreise (8) die Dreiecksteilung $(2, 4, 5)$ der Halbebene bewirken.

Der Abschluss unserer Überlegung gestaltet sich endlich wie folgt: Sollte das einzelne Kreisbogendreieck in seinem Innern noch *zwei* bezüglich der erweiterten Gruppe aequivalente Punkte aufweisen, so würde es eine Substitution geben, welche die gesamte Dreiecksteilung derart in sich überführen würde, dass speciell das Ausgangsdreieck in sich selbst transformiert erscheint. Nach den einfachsten Sätzen über Kreisverwandtschaft[1] ist aber evident, dass ein Kreisbogendreieck mit drei verschiedenen Winkeln *nur* durch die Identität $\eta' = \eta$ in sich übergeführt wird. Es hat sich somit bewährt, *dass die Gruppe des Kreisbogendreiecks* $(2, 4, 5)$ *thatsächlich in der am Schlusse von* § 1 *angegebenen Art arithmetisch zu definieren ist.*

Übrigens entspringen aus den gewonnenen Resultaten eine Reihe von Ergebnissen betreffs der Auflösung der quaternären Gleichungen (5) in ganzen algebraischen Zahlen A, B, C, D des oft genannten quadratischen Körpers, sowie auch betreffs der Einheiten desjenigen biquadratischen Körpers, der durch Adjunction von $\sqrt{P}$ entsteht. Auch bemerke man etwa noch, dass die Kreisbogen (8) von der ersten Classe die Einteilung der Halbebene in lauter reguläre rechtwinklige Fünfecke liefern, während die Kreise der zweiten Classe die Symmetrielinien der Fünfecke darstellen u. s. w.

---

[1] cf. M. I, pag. 88 ff.

§ 3. *Arithmetischer Charakter der zum Kreisbogendreieck* (2, 5, 6) *gehörenden Gruppe.*

Die grosse Ausführlichkeit, mit welcher soeben das Kreisbogendreieck (2, 4, 5) besprochen wurde, wird uns gestatten, in dem nun noch zu erledigenden Falle (2, 5, 6) um so kürzer zu verfahren. Um wieder ausschliesslich mit reellen Coefficienten der Substitutionen zu thun zu haben, legen wir das Ausgangsdreieck mit den Ecken p_2, p_5, p_6 so, dass die reelle η-Axe den gemeinsamen Orthogonalkreis der drei Seiten bildet. Im übrigen liege p_2 bei $\eta = i$, p_6 auf der imaginären Axe oberhalb $\eta = i$, während als Ausgangsdreieck der Gruppe $\Gamma(2, 5, 6)$ dasjenige »Doppeldreieck» genommen werden möge, welches durch den zwischen $\eta = i$ und p_6 verlaufenden Teil der imaginären Axe symmetrisch gehälftet wird.

Die Gruppe $\Gamma(2, 5, 6)$ lässt sich, wie man eben sah, aus zwei elliptischen Substitutionen V_1 und V_2 erzeugen, die $\eta = i$ bez. p_6 zu Fixpunkten haben und die Perioden 2 bez. 6 aufweisen. V_1 ist hiermit völlig bestimmt; bei V_2 ist noch die genaue Lage von p_6 unbekannt, und dieserhalb bleibt im Ausdruck von V_2 noch eine Constante zu bestimmen. Diese letztere ist in der Art zu wählen, dass $V_1 V_2$ die Periode 5 bekommt; *es ergeben sich so als Erzeugende der Gruppe* $\Gamma(2, 5, 6)$:

$$(1) \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}, & \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Indem wir nun V_1 und V_2 mit einander combinieren, müssen wir die allgemeinen Gesetze klarlegen, nach denen die Coefficienten der Substitutionen von $\Gamma(2, 5, 6)$ gebildet sind. Es ist evident, dass hier wieder die ganzen Zahlen A, B, C, D des quadratischen Körpers von der Basis $\left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ in Betracht kommen; ausserdem aber kommen noch zwei

Quadratwurzeln zur Geltung, nämlich diejenigen aus den beiden ganzen Zahlen:

$$(2)\qquad P = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad Q = 3$$

des quadratischen Körpers. Der Erfolg lehrt nun, dass man hier auf zwei verschiedene Typen von Substitutionen kommt: einmal haben wir Substitutionen:

$$(3)\qquad V = \begin{pmatrix} A + B\sqrt{P}\,, & C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ} \\ -C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ}\,, & A - B\sqrt{P} \end{pmatrix},$$

und hier ist evident, dass die Bauart dieser Substitutionen bei Combinationen unzerstörbar ist. Hat man aber eine Gruppe aus Substitutionen V zusammengesetzt, so lehrt eine leichte Rechnung, dass dieselbe mit der unter (1) mit V_1 bezeichneten Substitution vertauschbar ist. Wir werden also nach bekannten Regeln zu einer erweiterten Gruppe gelangen, wenn wir neben jedes V noch die Substitution:

$$(4)\qquad V' = \begin{pmatrix} C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ}\,, & A + B\sqrt{P} \\ -A + B\sqrt{P}\,, & C\sqrt{Q} - D\sqrt{PQ} \end{pmatrix}$$

reihen.

Nun ist V_2 quadrimodular und V_1 kann sofort zu einer ebensolchen Substitution ausgestaltet werden; beide subsumieren sich alsdann unter die allgemeine Gestalt (4), wenn wir die gegenwärtig vorliegende Bedeutung von $A, B, \ldots, P, Q$ berücksichtigen. Bei dieser Sachlage schreiben wir jetzt vor, dass die Substitutionen (3), (4), welche wir gebrauchen wollen, durchweg *quadrimodular* sein sollen.

Der weiteren Untersuchung stellt sich nun die nachfolgende Schwierigkeit entgegen. Nehmen wir das Ausgangsdreieck (2, 5, 6) so an, dass p_6 mit $\eta = i$ coincidiert, während p_2 oberhalb $\eta = i$ auf der imaginären Axe liegt, so subsumieren sich die erzeugenden Substitutionen gleichfalls unter die quadrimodularen V'. Auch in der neuen Gestalt besteht die Gruppe aus quadrimodularen V, V', und also gilt es, noch neue Bedingungen für A, B, C, D aufzustellen, welche uns in den Stand setzen, die Substitutionen von einander zu sondern, je nachdem sie bei der ersten

oder zweiten Gruppengestalt auftreten. In diesem Betracht gilt nun der Satz: *Die Gruppe* $\Gamma(2, 5, 6)$ *in ihrer ursprünglichen Fixierung wird von allen quadrimodularen Substitutionen* (3) *und* (4) *gebildet, welche die Bedingungen befriedigen:*

$$(5)\qquad A + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B + D \equiv 0, \qquad B + C + \frac{1+\sqrt{5}}{2}D \equiv 0, \ (\text{mod. } 2).$$

Um dies nachzuweisen, betrachten wir nur erst die quadrimodularen V mit der Bedingung (5) und haben an die Stelle des Schemas (4) § 2 das nachfolgende zu setzen:

$$(6)\qquad \begin{cases} 2A'' = AA' + PBB' - QCC' + PQDD', \\ 2B'' = AB' + BA' + QCD' - QDC', \\ 2C'' = AC' + PBD' + CA' - PDB', \\ 2D'' = AD' + BC' - CB' + DA'. \end{cases}$$

Sind die Bedingungen (5) für $A, B, \dots$ und $A', B', \dots$ erfüllt, so müssen einmal $A'', B'', \dots$ wieder ganze Zahlen sein, sodann müssen für diese ganzen Zahlen die Bedingungen (5) selbst wieder gelten:

Der erste Punkt erledigt sich so, dass man aus den Gleichungen (6) Congruenzen modulo 2 macht und dabei für A' und C' die mod. 2 mit ihnen congruenten Zahlen $PB' + D'$ und $B' + PD'$ einträgt. So findet z. B. für A'' die nachfolgende Rechnung statt:

$$2A'' \equiv A(PB' + D') + PBB' + QC(B' + PD') + PQDD',$$

$$2A'' \equiv B'(PA + PB + C) + D'(A + PC + PD);$$

hier stehen aber rechter Hand in den Klammern durch 2 teilbare Zahlen, wenn man nur berücksichtigen will, dass $P^2 + P + 1 \equiv 0$ (mod. 2) ist; A'' ist deshalb wirklich eine ganze Zahl des Körpers, und ein Gleiches beweist man in analoger Art für B'', C'' und D''.

Endlich ist noch die Unzerstörbarkeit der Bedingungen (5) gegenüber Combination von Substitutionen zu beweisen, und zu diesem Ende bilden wir aus (6) modulo 4 die Congruenz:

$$\begin{aligned} 2(A'' + PB'' + D'') \equiv A(A' + PB' + D') + B(PA' + PB' + C') \\ + C(C' - B' - PD') + D(A' + PC' - PD'), \ (\text{mod. } 4). \end{aligned}$$

Hier stehen rechter Hand in den Klammern allenthalben durch 2 teilbare Zahlen, und also können wir A und C auf Grund von (5) ersetzen; es folgt alsdann nach kurzer Zwischenrechnung:

$$2(A'' + PB'' + D'') \equiv 2B(PA' + PB' + C') + 2D(A' + PC' - PD'),$$

und hier stehen wieder rechter Hand in den Klammern durch 2 teilbare Zahlen, so dass die erste Congruenz (5) für A'', B'', ... thatsächlich erfüllt ist. Nicht anders beweist man das Bestehen der zweiten Congruenz (5).[1]

Dass die Gruppe der quadrimodularen V mit der Bedingung (5) eigentlich discontinuierlich ist, ergiebt sich gerade wie im vorigen Paragraphen durch Discussion der Gleichung:

$$A^2 - PB^2 + QC^2 - PQD^2 = 4,$$

wobei zur Geltung kommt, dass die mit P conjugierte Zahl $P' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ negativ, die mit $Q = 3$ conjugierte Zahl $Q' = 3$ dagegen positiv ist. Es wird demnach auch die Gruppe der quadrimodularen V, V' von der Bedingung (5) eigentlich discontinuierlich sein; denn sie enthält die Gruppe der V als Untergruppe vom Index 2 in sich.

Die eben zuletzt hergestellte Gruppe enthält jedenfalls die Gruppe des Kreisbogendreiecks (2, 5, 6) in sich; denn die Erzeugenden V_1, V_2 erfüllen als Substitutionen V' die Bedingungen (5). Es gilt nun noch zu zeigen, dass beide Gruppen geradezu identisch sind. Zu diesem Ende benutzen wir wieder die Symmetriekreise der durch Spiegelungen erweiterten Gruppe der V, V', und hier finden wir wieder zwei verschiedene Classen von Kreisen (den Typen V und V' entsprechend). Durch die gesammten Spiegelkreise wird eine Einteilung der Halbebene in lauter aequivalente Kreisbogenpolygone mit Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$ geleistet; denn man stellt leicht fest, dass unter den quadrimodularen V, V' an elliptischen Substitutionen nur solche der Perioden 2, 3, 5 und 6 auftreten können. Mögen wir mit einer n-eckteilung zu thun haben, wobei das einzelne Polygon $\varkappa$ Winkel $\frac{\pi}{2}$, λ Winkel $\frac{\pi}{3}$, μ Winkel $\frac{\pi}{5}$ und ν Winkel $\frac{\pi}{6}$

[1] Die eben zuletzt gegebene Entwicklung giebt einen speciellen Fall einer allgemeinen Untersuchung in den Mathem. Annalen, Bd. 42, pag. 586.

aufweist; alsdann ergiebt sich aus der Berechnung des Polygoninhalts im Sinne der nicht-euklidischen Maassbestimmung die diophantische Gleichung:

$$m(15\varkappa + 20\lambda + 24\mu + 25\nu - 60) = 4,$$

wenn m Polygone ein einzelnes Dreieck von Typus $(2, 5, 6)$ zusammensetzen. Nimmt man hier $m = 2$ oder $m = 4$, so ist beide Male eine Auflösung der diophantischen Gleichung in ganzen, nicht-negativen Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ nicht aufzufinden. Die einzige Möglichkeit ist somit $m = 1$, womit wir zum Kreisbogendreieck $(2, 5, 6)$ direct zurückkommen. Von hieraus zeigt sich dann endlich wie im vorigen Paragraphen, dass im Innern des genannten Dreiecks keine zwei bezüglich der Gruppe der V, V' aequivalente Punkte mehr vorkommen können. Die arithmetische Definition der in Rede stehenden Gruppe des Kreisbogendreiecks $(2, 5, 6)$ ist also oben in richtiger Weise gegeben.

§ 4. *Einführung zweier Riemann'schen Flächen von je* 120 *Blättern.*

Nach sehr bekannten Sätzen der Riemann'schen Functionentheorie existiert eine Function $z(\eta)$, welche ein Kreisbogendreieck der η-Ebene auf eine Halbebene z conform abbildet;[1] in unseren beiden Fällen $(2, 4, 5)$ und $(2, 5, 6)$ mögen zugehörige automorphe Functionen $z(\eta)$ dadurch eindeutig fixiert sein, dass wir in den Ecken p_2, p_4, p_5 resp. p_2, p_5, p_6 die Werte $z = 0$ bez. 1 und ∞ vorschreiben. In der Theorie dieser beiden Functionen $z(\eta)$ spielen alsdann die arithmetisch definierten Gruppen der beiden vorigen Paragraphen eben dieselbe Rolle, wie in der Theorie der Modulfunctionen die Gruppe der rational-ganzzahligen, unimodularen η-Substitutionen.

In wie weit dies für eine *Transformationstheorie* der Functionen $z(\eta)$ Bedeutung gewinnt, soll hier kurz ohne Beweis angegeben werden. Möge

[1] Wie die allgemeinen Riemann'schen Existenztheoreme durch die Methoden von Schwarz und Neumann ihre endgültigen Beweise gefunden haben, wolle man z. B. in M. I, pag. 508 ff. nachsehen; für die im Texte vorliegenden Verhältnisse vergl. man auch noch Ritter in den Mathem. Annalen, Bd. 41, pag. 12 ff.

Γ eine der beiden Gruppen sein und $z(\eta)$ die zugehörige Function, so wollen wir auf η eine Substitution W ausüben, die vollständig die Bauart der Substitutionen von Γ bewahrt mit der einen Ausnahme, dass W nicht quadrimodular oder duomodular sein soll, sondern als Determinante eine beliebige ganze Zahl des quadratischen Körpers darbieten mag. *Stets ist alsdann die transformierte Function $z'(\eta) = z(W(\eta))$ an die ursprüngliche durch eine algebraische Relation $f(z', z) = 0$ gebunden, die wir als Transformationsgleichung zu bezeichnen haben.* Als Ordnung der ausgeübten Transformation kann man etwa die Norm der Determinante von W benutzen.

Dieser allgemeine Satz ist einfach dadurch zu belegen, dass die Gruppe Γ durch Transformation vermöge W in eine Gruppe $\Gamma' = W^{-1}\Gamma W$ übergeführt wird, welche mit Γ im Sinne Poincaré's commensurabel [1] ist. Nennen wir n die Ordnung der Transformation W, so wird in der That durch die Forderung:

$$B \equiv C \equiv D \equiv 0, \pmod{n} \tag{1}$$

an die Substitutionen V von Γ eine Untergruppe ausgesondert, welche in Γ und Γ' zugleich enthalten ist. Dass aber die als *Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe* zu bezeichnende Untergruppe der Bedingungen (1) innerhalb Γ eine Untergruppe von *endlichem* Index ist, zeigt man durch elementare Betrachtungen. [2]

Wir folgen nun dem Vorbilde der Theorie der Modulfunctionen, wenn wir an Stelle der Transformation n^{ter} Ordnung sogleich eine ausführliche Theorie der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe innerhalb der einzelnen unserer beiden Gruppen treten lassen. Im übrigen sollen hier keineswegs allgemeine Entwicklungen über die Tragweite der angedeuteten Principien angestellt werden; vielmehr soll nur am nächstliegenden Beispiel aufgewiesen werden, wie sich die fraglichen Ansätze nach der functionentheoretischen Seite ausgestalten lassen. Wenn wir dabei Congruenzgruppen fünfter Stufe betrachten, so mag durch das Voraufgehende gerechtfertigt sein, warum wir von Entwicklungen zur Transformation *fünfter* Ordnung unserer automorphen Functionen $z(\eta)$ sprechen.

---

[1] Siehe wegen dieser Benennung Poincaré's Abhandlung *Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique,* in Liouville's Journal, 4te Folge, Bd. 3.

[2] Man sehe etwa wieder M. I, pag. 308 ff.

Wenn wir modulo 5 congruente Substitutionen nicht als verschieden ansehen, so reducieren sich die beiden Gruppen $\Gamma(2, 4, 5)$ und $\Gamma(2, 5, 6)$ auf gewisse zwei Gruppen von endlicher Ordnung, die nach bekannten gruppentheoretischen Sätzen [1] den Hauptcongruenzgruppen fünfter Stufe innerhalb der Gruppen Γ zugeordnet sind. Da aber 5 innerhalb unseres quadratischen Zahlkörpers keine Primzahl ist, so sind die beiden in Rede stehenden endlichen Gruppen nicht einfach. Demnach giebt es dann umgekehrt in den Gruppen Γ noch umfassendere ausgezeichnete Untergruppen, welche die Hauptcongruenzgruppen fünfter Stufe in sich enthalten.

Um die hiermit gemeinten Gruppen zu gewinnen, schreiben wir $j = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und bemerken, dass modulo 5 die folgende Congruenz gilt:

$$j^2 - j - 1 \equiv (j-3)^2 \equiv 0, \text{ (mod. 5)}.$$

Die neue Reduction, welche wir vornehmen wollen, besteht hiernach darin, dass wir $j \equiv 3$ (mod. 5) schreiben; es folgt dann:

$$j \equiv 3, \qquad P = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \equiv 2, \text{ (mod. 5)}$$

für $(2, 4, 5)$, während im Falle $(2, 5, 6)$ zu setzen ist:

$$j \equiv 3, \qquad P \equiv Q \equiv 3, \text{ (mod. 5)}.$$

Nach kurzer Zwischenrechnung aber entspringen die Sätze: *Die Gruppe $\Gamma(2, 4, 5)$ reduciert sich durch die bezeichnete Maassnahme auf die Gruppe aller* mod. 5 *incongruenten Substitutionen:*

$$\eta' \equiv \frac{(a + b\sqrt{2})\eta + (c + d\sqrt{2})}{(-c + d\sqrt{2})\eta + (a - b\sqrt{2})}, \text{ (mod. 5)} \tag{2}$$

einer gegen 5 *primen Determinante;* dabei sind a, b, c, d rationale ganze Zahlen, und ein gleichzeitiger Zeichenwechsel der vier Coefficienten ist hier überall ohne Wirkung. Die quadrimodularen V führen auf die Substitutionen (2), deren Determinante quadratischer Rest von 5 ist, die duomodularen V liefern entsprechend die Nichtreste. Andrerseits folgt: *Die Gruppe $\Gamma(2, 5, 6)$ reduciert sich auf alle incongruenten Substitutionen:*

---

[1] Man vergl. hier des näheren M. I, pag. 320.

$$(3) \qquad \eta' \equiv \frac{(a + b\sqrt{3})\eta + (c + d\sqrt{3})}{(c - d\sqrt{3})\eta + (a - b\sqrt{3})}, \quad (\text{mod. } 5)$$

einer gegen 5 *primen Determinante;* letztere ist Rest oder Nichtrest von 5, je nachdem eine Substitution (3) oder (4) § 3 vorliegt.

Um über Ordnung und Structur unserer endlichen Gruppen alles Wesentliche auszusagen, transformieren wir die Substitutionen (2), (3) vermöge:

$$(4) \qquad 2\eta \equiv \frac{1 - \sqrt{2}\,\omega}{1 + \sqrt{2}\,\omega} \quad \text{bez.} \quad \eta \equiv \frac{1 - \sqrt{3}\,\omega}{1 + \sqrt{3}\,\omega}$$

und gewinnen solchergestalt bez.:

$$\left.\begin{aligned} \omega' &\equiv \frac{(a - 2c)\omega - (b + 2d)}{-2(b - 2d)\omega + (a + 2c)} \\ \omega' &\equiv \frac{(a - c)\omega - (b + d)}{-3(b - d)\omega + (a + c)} \end{aligned}\right\} (\text{mod. } 5).$$

Hier stehen überall durchaus rationale Substitutionscoefficienten, und also lassen sich unsere beiden Gruppen isomorph beziehen auf die Gruppe aller incongruenten ganzzahligen Substitutionen:

$$\omega' \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad (\text{mod. } 5)$$

einer gegen 5 primen Determinante. Diese letztere Gruppe ist nun aus der Theorie der elliptischen Functionen sehr bekannt: *sie ist eine* G_{120} *der Ordnung* 120 *und isomorph mit der Permutationsgruppe von fünf Dingen.*

Indem wir hiermit zwei ausgezeichnete Untergruppen Γ_{120} je vom Index 120 in den beiden Gruppen Γ auffanden, betrachten wir vor allen Dingen noch die beiden zugehörigen Fundamentalpolygone. Als geschlossene Flächen gedacht[1] liefern dieselben zwei Flächen je mit einer regulär-symmetrischen Einteilung in 2.120 Dreiecke, und dabei kreuzen sich die Symmetrielinien der Einteilung im einen Falle immer zu 4 bez. 8 und 10, im anderen Falle zu 4 bez. 10 und 12. Beide Flächen gestatten 120 Transformationen in sich, und die beiden zugehörigen Gruppen G_{120} sind isomorph. Bilden wir diese Flächen vermöge der zugehörigen $z(\eta)$

[1] Siehe hier und in der Folge M. I, pag. 328 ff.

ab, so entspringen zwei Riemann'sche Flächen von 120 Blättern über den betreffenden Ebene z; diese Flächen sind je nur an den drei Stellen $z = 0, 1, \infty$ verzweigt, und zwar hängen die Blätter zu $2, 4, 5$ bez. zu $2, 5$ und 6 zusammen. Nach einer bekannten Formel berechnet man von hieraus, *dass die beiden fraglichen Flächen die Geschlechter* $p = 4$ *bez.* $p = 9$ *aufweisen.*

§ 5. *Von den algebraischen Functionen der* 120-*blättrigen Riemann'schen Flächen.*

Die vorangehenden Entwicklungen sollen dadurch zum Abschluss gebracht werden, dass wir über die algebraischen Functionen der beiden gewonnenen Riemann'schen Flächen erschöpfenden Aufschluss geben. Bei dem nicht ganz geringen Geschlechte sowie der erheblichen Blätteranzahl der fraglichen Flächen würde diese Untersuchung freilich aussichtslos erscheinen, hätten wir nicht in dem Umstande, *dass die beiden zugehörigen algebraischen Gebilde je durch* 120 *eindeutige Transformationen in sich übergehen,* das Mittel, Anschluss an gewisse Untersuchungen von Klein und Gordan zu gewinnen, die wir unmittelbar für den vorliegenden Zweck verwerten können. Wir schliessen zunächst unter alleinigem Gebrauch der ersten der beiden Flächen etwa so:

Die Normalcurve der Functionen φ [1] eines algebraischen Gebildes vom Geschlechte $p = 4$ ist eine Curve sechster Ordnung im Raume von drei Dimensionen: *Es giebt also eine Raumcurve* C_6 *sechster Ordnung des Geschlechtes* $p = 4$, *welche durch* 120 *Collineationen in sich übergeht.* Diese C_6 ist der vollständige Durchschnitt einer Fläche zweiter Ordnung mit einer solchen dritter Ordnung. Des genaueren gelten nach Weber und Noether l. c. die Sätze: durch die Curve C_6 lässt sich überhaupt nur eine einzige Fläche zweiter Ordnung hindurch legen, sowie drei linear-unabhängige Flächen dritter Ordnung. Betrachten wir vorab allein die Fläche zweiter Ordnung, die wir F_2 nennen.

[1] Siehe über diesen Gegenstand Weber, Mathem. Annalen, Bd. 13, Noether, Mathem. Annalen, Bd. 17, sowie übrigens M. I, pag. 569.

Die Fläche F_2 muss den Substitutionen der G_{120} entsprechend durch 120 Transformationen in sich selbst übergehen. Die beiden Schaaren geradliniger Erzeugender der Fläche F_2, die wir uns zweckmässig als Hyperboloid denken, werden bei der einzelnen Transformation entweder permutiert oder jede Schaar wird in sich transformiert. Sind λ und μ die Parameter der beiden Geradenschaaren, so werden entsprechend diesem Umstande die 120 Transformationen teils durch:

$$(1) \qquad \lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}, \qquad \mu' = \frac{a'\mu + b'}{c'\mu + d'}$$

darzustellen sein, teils aber durch:

$$(2) \qquad \lambda' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}, \qquad \mu' = \frac{a'\lambda + b'}{c'\lambda + d'}.$$

Nun giebt es aber mit Rücksicht auf die in § 4 erkannte Structur der G_{120} an Gruppen linearer Substitutionen einer Variabelen bekanntlich [1] keine brauchbare G_{120} und nur eine G_{60}, nämlich die Ikosaedergruppe. *Bei der in unserer G_{120} enthaltenen G_{60} erfahren somit λ und μ simultan die sechzig Ikosaedersubstitutionen; die* 60 *restierenden Transformationen entspringen alsdann durch Vertauschung der beiden Geradenschaaren.*

Hier haben wir nun den unmittelbaren Anschluss an Entwicklungen KLEIN's in der Ikosaedertheorie gewonnen.[2] Es erledigt sich erstlich die Frage, welcher Art die in (1) vorliegende isomorphe Beziehung der Ikosaedergruppe auf sich selbst ist. Es können hier nur zwei Arten der Zuordnung in Frage kommen, die in »Ikos.» als cogrediente und contragrediente Zuordnungen unterschieden sind.[3] Es ist kein Zweifel, dass für uns der Fall der *Contragredienz* zur Geltung kommt, und dass deshalb die analytische Darstellung der G_{120} eben jene ist, wie sie in »Ikos.», pag. 197 u. f., geleistet wird. Denn indem wir statt λ, μ die homogenen

---

[1] Siehe KLEIN, Mathem. Annalen, Bd. 9, und GORDAN, Mathem. Annalen, Bd. 12.

[2] Man sehe KLEIN's *Vorlesungen über das Ikosaeder,* die weiterhin als »Ikos.» citiert sind; namentlich kommen die Entwicklungen pag. 179 ff. sowie pag. 197 ff. in Betracht.

[3] Siehe auch M. II, pag. 135, wo übrigens »digredient» statt contragredient geschrieben ist.

Variabelen $\lambda_1:\lambda_2$ und $\mu_1:\mu_2$ gebrauchen, muss unsere auf dem Hyperboloid F_2 gelegene Curve C_6 nach »Ikos.», pag. 180, durch Nullsetzen einer doppelt-binären Form $f(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)$ von der Dimension 3 in jeder Variabelenreihe dargestellt werden können; und *nur* im Falle der Contragredienz wird uns eine, und zwar auch nur eine Form dieser Art geliefert.

Das volle System der Formen, welche sich bei der für uns vorliegenden G_{120} invariant verhalten, ist nun bereits vor langer Zeit von Gordan [1] aufgestellt und »Ikos.», pag. 196, reproduciert; dieses System besteht aus vier Formen, die l. c. durch $\alpha, \beta, \gamma, \nabla$ bezeichnet sind, und die in der einzelnen Variabelenreihe λ_1, λ_2 bez. μ_1, μ_2 die Dimensionen $3, 4, 5, 10$ haben. Um Collisionen der Bezeichnungsweise zu vermeiden, nenne ich die fraglichen Formen A_3, A_4, A_5, A_{10} und muss die beiden ersten unter ihnen hier ausführlich angeben, da sie gleich weiter gebraucht werden:

$$(3)\quad \begin{cases} A_3(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = -\lambda_1^3\mu_1^2\mu_2 - \lambda_1^2\lambda_2\mu_2^3 - \lambda_1\lambda_2^2\mu_1^3 + \lambda_2^3\mu_1\mu_2^2, \\ A_4(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = -\lambda_1^4\mu_1\mu_2^3 + \lambda_1^3\lambda_2\mu_1^4 + 3\lambda_1^2\lambda_2^2\mu_1^2\mu_2^2 - \lambda_1\lambda_2^3\mu_2^4 + \lambda_2^4\mu_1^3\mu_2. \end{cases}$$

Die vier Formen A sind nicht von einander unabhängig; vielmehr besteht zwischen ihnen die nachfolgende Relation identisch:

$$(4)\quad A_{10}^2 = 108A_3^5A_5 - 135A_3^4A_4^2 + 90A_3^2A_4A_5^2 - 320A_3A_4^3A_5 + 256A_4^5 + A_5^4,$$

die aus »Ikos.», pag. 182, direct herübergenommen ist. Was nun die durch Nullsetzen unserer vier Formen dargestellten Raumcurven angeht, so haben wir in $A_3 = 0$ und $A_4 = 0$ zwei nicht-zerfallende Raumcurven C_6 und C_8 von sechster und achter Ordnung. Demgegenüber stellen $A_5 = 0$ und $A_{10} = 0$ zerfallende Gebilde dar, nämlich Systeme von fünf bez. zehn Kegelschnitten; die letzteren sind die Symmetrielinien gewisser zehn der G_{120} angehörender »Spiegelungen» des Hyperboloids F_2 in sich.

Dass nun die durch $A_3 = 0$ dargestellte C_6 die Normalcurve der φ für unsere erste 120-blättrige Fläche ist, geht aus der bisherigen Überlegung hervor. Immerhin müssten wir hier noch dem Einwande begegnen, ob wir nicht vielleicht mit einem hyperelliptischen Gebilde zu thun haben,

[1] Cf. Mathem. Annalen, Bd. 13.

wo die Überlegungen am Eingang des Paragraphen ungültig würden. Dass aber die durch $A_4 = 0$ dargestellte C_8 eine Specialcurve der anderen Riemann'schen Fläche ist, dürfte von letzterer aus nur schwierig zu erkennen sein. Wir werden daher in beiden Fällen durch directe Betrachtung der beiden Curven zum Ziele kommen müssen.

Um das Geschlecht der einzelnen C_{2n} zu bestimmen, projicieren wir sie von einem ihrer Punkte aus auf eine Ebene. Sie geht alsdann in eine ebene C_{2n-1} mit zwei $(n - 1)$-fachen Punkten über; die letzteren rühren in der That von jenen beiden geradlinigen Erzeugenden der F_2 her, die durch das Projectionscentrum gehen; jede derselben schneidet die C_{2n} noch in $n - 1$ Punkten. Sonstige mehrfache Punkte müssten auch auf der C_{2n} solche sein; jedoch müssten auf der C_{2n} mit einem Punkte alle bezüglich der G_{120} aequivalenten Punkte mehrfach sein, man würde also immer eine für die Werte $n = 3$ und 4 übergrosse Anzahl von mehrfachen Punkten auf C_{2n-1} erhalten. Demgemäss ist das Geschlecht der C_{2n}:

$$p = \frac{(2n-2)(2n-3)}{2} - 2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} = (n-1)^2,$$

und also liefern uns die Curven C_6 und C_8 wirklich algebraische Gebilde der Geschlechter $p = 4$ und 9 mit je 120 eindeutigen Transformationen in sich.[1]

Sollen wir hier nun thatsächlich mit den beiden algebraischen Gebilden des vorigen Paragraphen zu thun haben, so müssen wir auf den Curven C_6 und C_8 je eine 120-wertige Function z construieren können, die gegenüber den 120 Transformationen des Gebildes in sich invariant ist, und die überdies von sich aus zu der einzelnen der oben betrachteten 120-blättrigen Flächen hinführen muss.

Um dies zuvörderst für die Curve C_6 zu leisten, schreiben wir die Relation (4) speciell für die Voraussetzung $A_3 = 0$ in der Gestalt:

$$A_{10}^2 - A_5^4 - 256A_4^5 = 0 \tag{5}$$

und führen z als Parameter des Curvenbüschels 40[ter] Ordnung ein:

$$A_{10}^2 - 256zA_4^5 = 0. \tag{6}$$

[1] Dass die durch $A_3 = 0$ dargestellte Curve sechster Ordnung irreducibel und vom Geschlechte $p = 4$ ist, bemerkte KLEIN bereits in »Ikos.», pag. 202.

Die einzelne dieser Curven wird auf dem Hyperboloid F_2 durch eine Fläche 20ster Ordnung ausgeschnitten, welche letztere die C_6 in einem System von 120 bezüglich der G_{120} aequivalenten Punkten schneidet. Mit Hilfe von (5) können wir nun (6) umschreiben in die Proportion:

$$z : z - 1 : 1 = A_{10}^2 : A_5^4 : 256 A_4^5 \tag{7}$$

und haben damit eine 120-wertige, gegenüber G_{120} invariante, algebraische Function z des Gebildes construiert.

Nun ist aus (7) evident, dass die 120 Punkte der C_6 mit $z = 0$ zu Paaren an sechzig Stellen coincidieren, die durch $A_{10} = 0$ ausgeschnitten werden; desgleichen coincidieren die Punkte $z = 1$ zu 4 an 30 Stellen und die Punkte $z = \infty$ zu 5 an 24 Stellen. Unter der Voraussetzung, dass im einzelnen dieser drei besonderen Punktsysteme keine zwei Punkte mehr coincidieren, und dass ferner jedem von $z = 0, 1, \infty$ verschiedenen Werte z stets 120 durchgängig getrennt liegende Punkte der C_6 entsprechen, gewinnen wir durch Abbildung der C_6 vermöge der algebraischen Function z eine Riemann'sche Fläche des Geschlechtes $p = 4$, in Übereinstimmung mit dem Geschlechte der C_6. Jede andere Annahme würde aber auf eine Erhöhung der Geschlechtszahl p führen, ist also unzulässig.

Um die Untersuchung der Curve C_8 vorab bis zu dem gleichen Punkte zu fördern, setzen wir die Relation (4) unter der Voraussetzung $A_4 = 0$ in die specielle Gestalt:

$$A_{10}^2 = A_5 (A_6^3 + 108 A_3^5). \tag{8}$$

Hier werden nun auf der C_8 zwei Systeme zu 24 bez. 40 Punkten durch $A_3 = 0$ und $A_5 = 0$ ausgeschnitten, die, wie man leicht beweist, jedenfalls keine Punkte gemeinsam haben. Der zweite Faktor auf der rechten Seite von (8) wird sonach, mit Null identisch gesetzt, auf C_8 lauter Punkte ausschneiden, die von den 40 Punkten $A_5 = 0$ sicher verschieden sind. Nun schneidet aber $A_{10}^2 = 0$ achtzig Punkte je doppelt gezählt aus; es folgt somit aus der Identität (8), dass $A_5 = 0$ vierzig Punkte ausschneidet, die zu Paaren coincidieren. Dem Rechnung tragend schreiben wir:

$$z : z - 1 : 1 = \left(\frac{A_{10}}{\sqrt{A_5}}\right)^2 : 108 A_3^5 : (\sqrt{A_5})^6, \tag{9}$$

was mit der Relation (8) in Übereinstimmung ist. Von hieraus gestaltet sich die Schlussweise gerade so wie bei der C_6; wir gewinnen durch Abbildung des algebraischen Gebildes vermöge z eine 120-blättrige Riemann'sche Fläche des Geschlechtes $p = 9$, welche an Lage und Art der Verzweigungspunkte mit der zweiten Riemann'schen Fläche des vorigen Paragraphen übereinstimmt.

Die beiden soeben auf algebraischem Wege abgeleiteten Riemann'schen Flächen von je 120 Blättern stimmen also mit den beiden arithmetisch gewonnenen Flächen des vorigen Paragraphen nach Zahl, Art und Lage der Verzweigungspunkte sowie auch in Ansehung der Gruppen G_{120} eindeutiger Transformationen der Flächen in sich vollkommen überein. Von hieraus lässt sich aber die genaue Identität der in Rede stehenden Flächen wie folgt beweisen.

Nach einem Fundamentalsatze der Theorie der automorphen Functionen [1] existiert auf der einzelnen der beiden zu den Gleichungen (7) und (9) gehörenden Riemann'schen Flächen jeweils eine unverzweigte η-Function, welche die Fläche auf ein einfach bedecktes und einfach zusammenhängendes Kreisbogenpolygon mit Hauptkreis abbildet. Bei geschlossenen Wegen auf der Fläche erfährt η lineare Substitutionen, die in ihrer Gesamtheit eine eigentlich discontinuierliche Gruppe bilden mit dem Abbild der Fläche als Fundamentalbereich. Es erleidet η überdies bei allen eindeutigen Transformationen der Fläche in sich lineare Substitutionen. Nun ist leicht evident, *dass wir hier zu jenen beiden η-Functionen zurückgeführt werden, die wir in sofort verständlicher Abkürzung $\eta(2, 4, 5; z)$, $\eta(2, 5, 6; z)$ schreiben.* Man bemerke nur, dass Stücke der reellen Axe der einzelnen Fläche in der bezüglichen η-Ebene stets Kreisbogen als Abbilder liefern; denn symmetrische Umformungen der Fläche in sich, bei denen Teile der reellen z-Axe an ihrer Stelle bleiben, liefern Spiegelungen der η-Ebene. Dass aber dann ein einzelnes Halbblatt der Fläche sich auf ein Kreisbogendreieck $(2, 4, 5)$ bez. $(2, 5, 6)$ abbildet, ist aus der Verzweigung der Fläche sofort evident.

Bei dieser Sachlage wird die einzelne unserer Flächen vermöge $\eta(z)$ auf eine Netz von $2 . 120$ Kreisbogendreiecken der Einteilung $(2, 4, 5)$ bez. $(2, 5, 6)$ abgebildet, und die offenen Randcurven dieses grossen Po-

---

[1] Siehe KLEIN in den Mathem. Annalen, Bd. 20, pag. 49.

lygons müssen so zusammengeordnet sein, dass dasselbe eine in der Gesamtgruppe $\Gamma(2, 4, 5)$ bez. $\Gamma(2, 5, 6)$ ausgezeichnete Untergruppe definiert. Hier zeigt sich nun, dass die gewünschte Zusammenordnung der Randcurven des Polygons überhaupt nur in einer einzigen Weise getroffen werden kann. Daraus aber würde folgen, *dass die einzelne unserer Flächen aus der Zahl, Lage und Art ihrer Verzweigungspunkte sowie ihrer Eigenschaft, die G_{120} von Transformationen in sich zu besitzen, bereits eindeutig bestimmt ist.* Man kann dies durch wirkliche Herstellung der betreffenden Dreiecksnetze und Discussion derselben thatsächlich durchführen. Findet man aber die graphische Handhabung grösserer Dreiecksnetze zu umständlich, so lässt sich auf folgende Art eine wesentliche Vereinfachung der Schlussweise herbeiführen.

Sei Γ eine unserer beiden Gruppen $\Gamma(2, 4, 5)$ und $\Gamma(2, 5, 6)$ und Γ_{120} eine in Γ ausgezeichnete Untergruppe, deren zugehörige endliche Gruppe G_{120} mit der Permutationsgruppe von fünf Dingen isomorph sei. Die Function $z(\eta)$ nimmt im Polygon der Gruppe Γ_{120} den einzelnen complexen Wert 120 Male an, und die Aufgabe, bei gegebenem z den einzelnen Punkt des Polygons zu bestimmen, ist im Sinne einer in der Theorie der Modulfunctionen[1] gebräuchlichen Sprechweise als ein Galois'sches Problem 120[sten] Grades zu bezeichnen. Bei der bekannten Structur der G_{120} hat dieses Problem eine Resolvente fünften Grades, und umgekehrt kann die G_{120} als Galois'sche Gruppe dieser Gleichung fünften Grades angesehen werden, das Polygon der Γ_{120} aber als Riemann'sche Fläche der zugehörigen Galois'schen Resolvente. Es ist demnach evident, dass die Γ_{120} mit jener Gleichung fünften Grades eindeutig bestimmt ist. Nun ist aber leicht zu zeigen, dass es für jeden unserer beiden Fälle $(2, 4, 5)$, $(2, 5, 6)$ nur *eine einzige* Gleichung fünften Grades giebt, deren Galois'sche Resolvente die hier zu fordernde Beschaffenheit hat. Um etwa bei $(2, 5, 6)$ zu verweilen, so müssen wir eine fünfblättrige Riemann'sche Fläche construieren, die nur bei $z = 0, 1, \infty$ verzweigt ist. Bei $z = \infty$ müssen alle fünf Blätter zusammenhängen, bei $z = 1$ müssen zwei Verzweigungspunkte zu zwei bez. drei Blättern vorliegen, endlich bei $z = 0$ hängen die Blätter zu Paaren zusammen oder sie verlaufen isoliert. Es existiert nur *eine* Riemann'sche Fläche, die diesen Anforderungen genügt;

[1] Siehe M. I, pag. 607 ff.

dieselbe liefert in der Dreiecksteilung der η-Ebene das in Fig. 3 gezeichnete Polygon, wobei übrigens zur Vereinfachung der Zeichnung eine gegen früher etwas veränderte Lage des Hauptkreises der Dreiecksteilung angenommen wurde. Ein analoges Resultat entspringt im Falle $(2, 4, 5)$, wo sich das Polygon der Fig. 4 als einzig brauchbares einstellt. Indem hiernach die Resolventen fünften Grades eindeutig bestimmt sind, gilt ein Gleiches von den Gruppen Γ_{120}, und alle voraufgehend aufgestellten Behauptungen sind damit verificiert.

Fig. 3.

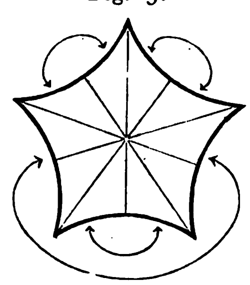
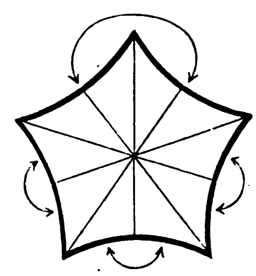


Fig. 4.



Es mag noch interessieren, die explicite Gestalt der beiden Gleichungen fünften Grades kennen zu lernen, die den zwei angegebenen Polygonen zugehören; man findet für die Fälle $(2, 4, 5)$ resp. $(2, 5, 6)$:

$$z : z - 1 : 1 = \tau^4(4\tau - 5) : (\tau - 1)^2(4\tau^3 + 3\tau^2 + 2\tau + 1) : -1,$$

$$z : z - 1 : 1 = \tau^2(\tau^3 - 5\tau^2 - 5\tau + 45) : (\tau - 3)^3(\tau + 2)^2 : 4 . 27,$$

wobei τ als Unbekannte und z als Parameter zu denken ist. Hier hat man mit zwei Gleichungen fünften Grades zu thun, die durch eindeutige Functionen von $\eta(2, 4, 5; z)$ bez. $\eta(2, 5, 6; z)$ auflösbar sind.

§ 6. *Von der Beziehung der beiden Curven C_6 und C_8 auf das Ikosaeder.*

Die gewonnenen Ergebnisse gestatten, eine grosse Reihe von Folgerungen nach Seiten der Geometrie zu ziehen; man wird die auf dem Hyperboloid F_2 vorliegenden Verhältnisse ausführlich mit den beiden

geschlossenen Netzen zu 2.120 Dreiecken in Connex setzen können. Aus dem sich hier bietenden Untersuchungsbereich soll indes nur eine einzige Frage discutiert werden. Bevorzugen wir das eine System der geradlinigen Erzeugenden auf dem Hyperboloid F_2, so schneidet die einzelne Gerade die C_6 in drei, die C_8 in vier Punkten. Hier liegt also eine 3-4-deutige algebraische Correspondenz[1] zwischen beiden Curven vor, und diese wollen wir doch auch ganz direct von den Kreisbogendreiecken aus verstehen.

Zu diesem Ende sei zunächst bemerkt, dass der einzelnen geradlinige Erzeugenden vom Parameter λ doch der Punkt λ einer Kugel entsprechend gesetzt werden kann, welche letztere wir als Trägerin der complexen Werte λ benutzen. Diese Kugel ist kurz als Ikosaeder zu bezeichnen, denn sie erfährt die Ikosaederdrehungen bei der Hälfte der Substitutionen der G_{120}. Man kann somit sagen: *Das Ikosaeder ist auf die C_6 ein-dreideutig, auf die C_8 ein-vierdeutig bezogen.*

Um nun die hier vorliegenden Correspondenzen in einfachster Weise durch Figuren zu illustrieren, gehen wir auf einen sehr wichtigen Satz Poincaré's über die Abhängigkeit verschiedener Dreiecksfunctionen von einander zurück.[2] Nach diesem Satze ist $\eta(2, 3, 5; z)$ — um sogleich diese sofort verständliche Bezeichnung zu gebrauchen — eine eindeutige Function von $\eta(2, 3, \infty; z)$; desgleichen ist $\eta(2, 4, 5; z)$ eindeutig in $\eta(2, 4, \infty; z)$ und $\eta(2, 5, 6; z)$ in $\eta(2, \infty, 6; z)$. Zu $\eta(2, 3, \infty; z)$ gehört die der Theorie der Modulfunctionen zu Grunde liegende Gruppe; die Gruppen von $\eta(2, 4, \infty; z)$ und $\eta(2, \infty, 6; z)$ lassen sich arithmetisch ohne Mühe mit Hülfe der Irrationalitäten $\sqrt{2}$ bez. $\sqrt{3}$ definieren, und es trifft sich, dass die Reduction dieser Gruppen modulo 5 genau auf jene beiden endlichen Gruppen G_{120} führt, die wir in § 4 aus den damaligen Substitutionen (2) bez. (3) aufbauten.

Die Beziehung zwischen den Dreiecken $(2, 4, \infty)$ und $(2, 3, \infty)$ ist nun in Fig. 5 bezeichnet; man sieht, dass sich zwei Dreiecke $(2, 4, \infty)$ genau mit einem Complex dreier Dreiecke $(2, 3, \infty)$ decken. Demgemäss werden die 2.120 Dreiecke des zur Curve C_6 gehörenden Po-

[1] Siehe über diesen Gegenstand HURWITZ in den Mathem. Annalen, Bd. 28, sowie M. II, pag. 518.

[2] Siehe POINCARÉ in den Acta mathematica, Bd. 5.

lygons genau 3 . (2 . 60) Dreiecke (2 , 3 , ∞) bedecken, d. i. genau drei Abbilder des Ikosaeders, und hierin liegt die 1-3-deutige Beziehung des letzteren auf die C_6 offen vor. An der unteren Spitze der Figur 5 bei $\eta = 0$ deckt sich das Dreieck (2 , 4 , ∞) gerade genau mit dem Dreieck (2 , 3 , ∞); an der oberen nach $\eta = i\infty$ ziehenden Spitze decken sich erst zwei Dreiecke (2 , 3 , ∞) mit einem Dreieck (2 , 4 , ∞). Dies ergiebt den Satz: *Das durch die C_6 gegebene algebraische Gebilde lässt sich auch durch dreifache Überdeckung des Ikosaeders definieren, wobei an den zwölf Ikosaederecken immer zwei Blätter zusammenhängen.* Da $p = 4$ sein muss,

Fig. 5.

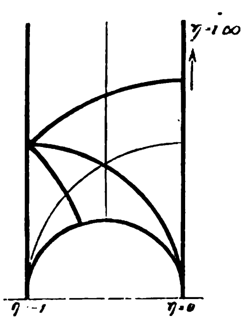
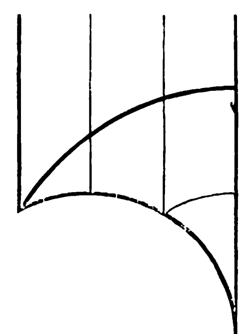


Fig. 6.



so treten weitere Verzweigungspunkte nicht auf, und also giebt es unter den Erzeugenden der einen Art auf F_2 nur 12 (gewöhnliche) Tangenten der Curve sechster Ordnung C_6.

Die Beziehung zwischen den Dreiecken (2 , 3 , ∞) und (2 , 6 , ∞) ist in Fig. 6 illustriert, es decken sich immer zwei Dreiecke (2 , 6 , ∞) mit vier Dreiecken (2 , 3 , ∞); damit aber wird die 1-4-deutige Beziehung der C_8 auf das Ikosaeder evident. Insbesondere lesen wir noch aus Fig. 6 ab: *Das durch C_8 gegebene Gebilde kann man auch durch ein vierfach überdecktes Ikosaeder definieren, wobei an der einzelnen Ecke immer 3 Blätter verzweigt sind;* dies liefert wirklich $p = 9$.

ZWEITER TEIL.

Entwicklungen über die Dreiecksfunctionen $\eta(2,3,7;z)$, $\eta(2,4,7;z)$ und einige verwandte Polygonfunctionen.

§ 1. *Bericht über die Gruppen der Dreiecke* (2, 3, 7) *und* (2, 4, 7) *und Aufstellung zweier zur Transformation siebenter Ordnung gehörender Untergruppen.*

Ohne die Berührung mit bekannten functionentheoretischen Untersuchungen zu verlieren, können wir die unternommenen Entwicklungen noch in das Gebiet der Transformation siebenter Ordnung fortsetzen. Hierbei ist zuvörderst kurz der arithmetische Charakter der zu den Kreisbogendreiecken (2, 3, 7) und (2, 4, 7) gehörenden Gruppen zu recapitulieren.[1]

Die fraglichen Gruppen lassen sich am einfachsten von der Gruppe des regulären rechtwinkligen Siebenecks aus beschreiben. Das Siebeneck soll dabei so liegen, dass die reelle η-Axe der Orthogonalkreis der Siebenecksseiten ist, während zwei unter diesen Seiten auf der imaginären η-Axe bez. dem Einheitskreise liegen. Zieht man alsdann in diesem Siebeneck die sieben Symmetrielinien, so entsteht die Dreiecksteilung (2, 4, 7). Um die Einteilung (2, 3, 7) zu gewinnen, bemerken wir, dass nach Formel (13), § 2, der Inhalt I des Siebenecks:

$$I = 4k^2\left(5\pi - \frac{7\pi}{2}\right) = 6k^2\pi$$

ist, während für den Inhalt δ des Dreiecks (2, 3, 7):

$$\delta = 4k^2\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7}\right) = \frac{2k^2\pi}{21}$$

[1] Die beiden Gruppen (2, 3, 7) und (2, 4, 7) sind ausführlich in den Mathem. Annalen, Bd. 41, pag. 443 ff. behandelt; die Bezeichnungsweise des vorliegenden Textes ist gegen die dortige ein wenig modificiert.

folgt. Es sind also 63 Dreiecke (2, 3, 7) zusammen inhaltsgleich mit dem Siebeneck, und dies wird geometrisch dadurch unmittelbar evident, dass sich das Siebeneck durch Hinzunahme neuer Symmetriekreise geradezu in 63 Dreiecke (2, 3, 7) zerlegt. Die betreffende Figur ist l. c. pag. 458 ausführlich gezeichnet, wo man dann auch nachsehen wolle, dass die fragliche Einteilung des Siebenecks eine unsymmetrische ist. Es sind in der That zwei Einteilungen möglich, die bei Inversion an einer Siebeneckdiagonale in einander übergehen.

Um jetzt die hier in Betracht kommenden η-Substitutionen bezeichnen zu können, haben wir den cubischen Zahlkörper der ganzzahligen Gleichung:

$$(1) \qquad j^3 + j^2 - 2j - 1 = 0$$

einzuführen. Dieser Körper besitzt in $[1, j, j^2]$ eine Basis, und es seien A, B, C, D ganze Zahlen desselben. Wir haben dann hier wieder mit Substitutionen der Gestalt:

$$(2) \qquad \eta' = \frac{(A + B\sqrt{P})\eta + C + D\sqrt{P}}{(-C + D\sqrt{P})\eta + A - B\sqrt{P}}$$

zu thun, wobei P die ganze Zahl $(j - 1)$ des cubischen Körpers ist. Des genaueren aber gelten nach den l. c. gegebenen Entwicklungen die Sätze: *Die Gruppe der Function $\eta(2, 4, 7; z)$ besteht aus allen duomodularen Substitutionen* (2) *im Verein mit denjenigen quadrimodularen, welche die Bedingungen:*

$$(3) \qquad A \equiv C, \qquad B \equiv D \quad (\text{mod. } 2)$$

befriedigen. Bei der Gruppe (2, 3, 7) kommt die doppelte Möglichkeit, das Siebeneck in 63 Dreiecke zu teilen, zur Geltung. Wir müssen hier nämlich die gesamten quadrimodularen Substitutionen (2) in zwei Classen teilen; die Substitutionen der einen Classe sollen den Bedingungen genügen:

$$(4) \quad A + B + (j^2 + j - 1)D \equiv 0, \quad C + (j^2 + j - 1)B + D \equiv 0, \ (\text{mod. } 2),$$

diejenigen der anderen Classe aber den Bedingungen:

$$(5) \quad A + (j^2 + j - 1)B + D \equiv 0, \quad C + B + (j^2 + j - 1)D \equiv 0, \ (\text{mod. } 2).$$

Es bilden dann die Substitutionen der einen oder zweiten Classe die Gruppe

(2, 3, 7), *je nachdem wir von der einen oder andern Einteilung des Siebenecks ausgehen.*

Die linke Seite der Gleichung (1) reduciert sich nach dem Zahlmodul 7 auf den Cubus des linearen Ausdrucks $(j - 2)$. Wir wollen dementsprechend die beiden Gruppen (2, 3, 7) und (2, 4, 7) modulo 7 reducieren, indem wir zugleich $j \equiv 2$ und im Anschluss daran

$$\sqrt{P} = \sqrt{j - 1} \equiv 1 \pmod{7}$$

schreiben. Die Determinanten der zur Verwendung kommenden Substitutionen (2) sind durchweg quadratische Reste modulo 7; man kann die modulo 7 reducierten Substitutionen dieserhalb dadurch zu unimodularen ausgestalten, dass man jeweils die vier Coefficienten mit einer ganzen rationalen Zahl als gemeinsamen Faktor versieht. *Auf die bezeichnete Weise lassen sich die beiden Gruppen* (2, 3, 7), (2, 4, 7), *wie man sieht, homomorph* [1] *auf die bekannte Gruppe* G_{168} *der* 168 *incongruenten unimodularen Substitutionen mit ganzen rationalen Coefficienten:*

$$\omega' \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \pmod{7}, \tag{6}$$

beziehen. Dabei entspricht einer Substitution der Gruppe (2, 3, 7) bez. (2, 4, 7) stets *eine* Operation der G_{168}, während natürlich umgekehrt einer Substitution (6) unendlich viele Substitutionen in der einzelnen jener beiden Gruppen zugeordnet sind.

Indem wir insbesondere diejenigen Substitutionen der Gruppe (2, 3, 7) bez. (2, 4, 7) sammeln, welche der Identität (6) zugehören, werden wir in jeder unserer beiden Dreiecksgruppen *eine ausgezeichnete Untergruppe* Γ_{168} *von Index* 168 *gewinnen.* Unter diesen beiden Untergruppen Γ_{168} ist die zur Gruppe (2, 3, 7) gehörende sehr bekannt; sie spielt bei der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen ihre bekannte wichtige Rolle.[2] Sollen wir die beiden Gruppen durch die Bezeichnungen $\Gamma_{168}(2, 3, 7)$ und $\Gamma_{168}(2, 4, 7)$ unterscheiden, so könnte man die zugehörigen Polygone bez. geschlossenen Flächen durch $F_{168}(2, 3, 7)$ und $F_{168}(2, 4, 7)$ bezeichnen. Man kann dieselben zu 168-blättrigen

[1] Wegen der hier gebrauchten Bezeichnungsweise sehe man den eben mehrfach genannten Band 41 der Annalen, pag. 466, Note.

[2] Siehe KLEIN, Bd. 14 der Annalen, pag. 429 ff. oder M. I, pag. 692 ff.

Riemann'schen Flächen umgestalten, welche über den Ebenen y der zu $\eta(2, 3, 7; y)$ und $\eta(2, 4, 7; y)$ inversen Functionen gelagert sind. Aus der leicht festzustellenden Verzweigung dieser Flächen folgt alsdann, *dass sie zu den Geschlechtern $p = 3$ und $p = 10$ gehören,* was ein für die Gruppe $\Gamma(2, 3, 7)$ wieder sehr bekanntes Resultat einschliesst. Die nun zu entwickelnde functionentheoretische Behandlung der $\Gamma_{168}(2, 4, 7)$ basieren wir auf die Gruppe G_{168} der Transformationen der Fläche in sich.

§ 2. *Vom functionentheoretischen Charakter der beiden Untergruppen Γ_{168}.*

Die functionentheoretische Behandlung der zu $(2, 3, 7)$ gehörenden Untergruppe Γ_{168} ist von KLEIN l. c. geleistet worden. Es zeigte sich auf Grund geometrisch-functionentheoretischer Überlegungen, dass das durch die fragliche Gruppe definierte algebraische Gebilde vom Geschlechte $p = 3$ als Normalcurve [1] die durch

$$z_1^3 z_4 + z_4^3 z_2 + z_2^3 z_1 = 0 \tag{1}$$

gegebene ebene Curve vierter Ordnung besitzt, wobei z_1, z_2, z_4 homogene Punktcoordinaten einer Ebene sind. Diese Curve geht der G_{168} entsprechend durch 168 ternäre lineare Substitutionen der z_α in sich selbst über, und in der Existenz und Gestalt [2] dieser ternären Gruppe gewann die Untersuchung eine neue Basis.

Einmal war nämlich die Gruppe G_{168} als Collineationsgruppe für die z_α-Ebene aufs neue einer geometrischen Untersuchung fähig. Fürs zweite konnte man die Hülfsmittel der linearen Invariantentheorie heranziehen, um neben der linken Seite der Gleichung (1) andere wichtige Formen $f(z_1, z_2, z_4)$ zu gewinnen, welche gegenüber der ternären Gruppe G_{168} die Rolle absoluter Invarianten spielen. Es ist durch KLEIN [3] und GORDAN [4] sogar wieder das »volle System» der hier in Betracht kommenden

[1] M. I, pag. 569.

[2] Wegen der letzteren sehe man M. I, pag. 705.

[3] Math. Annalen, Bd. 14, pag. 446 und Bd. 15, pag. 265 ff.

[4] Math. Annalen, Bd. 17, pag. 370.

Formen aufgestellt. Dasselbe umfasst insgesamt *vier* Bildungen der Dimensionen 4, 6, 14 und 21; wir bezeichnen diese Formen kurz durch f_4, f_6, f_{14} und f_{21}.[1] Zwischen ihnen besteht die algebraische Identität:

$$(2)\qquad \begin{aligned} f_{21}^2 = f_{14}^3 &+ 1728 f_6^7 - 88 f_4^2 f_6 f_{14}^2 + 16.63 f_4 f_6^4 f_{14} \\ &+ 17.64.f_4^4 f_6^2 f_{14} - 256 f_4^7 f_{14} - 128.469 f_4^3 f_6^5 \\ &+ 43.512 f_4^6 f_6^3 - 2048 f_4^9 f_6, \end{aligned}$$

die weiterhin mehrfach zur Verwendung kommt.

Sei jetzt irgend eine gegenüber der G_{168} invariante Curve n^{ter} Ordnung in der z_α-Ebene durch $f_n(z_\alpha) = 0$ vorgelegt, so wird die links stehende Form n^{ten} Grades gegenüber der G_{168} absolut invariant sein.[2] Es ist demnach f_n als ganze rationale, in den z homogene, Verbindung der $f_4, f_6, \ldots$ darstellbar; und zwar genügen, wenn wir uns auf irreducibele Curven einschränken wollen, offenbar bereits f_4, f_6 und f_{14} zur Darstellung aller f_n:

$$(3)\qquad f_n(z_1, z_2, z_4) = G(f_4, f_6, f_{14}).$$

Umgekehrt können wir auf diese Weise unendlich viele, gegenüber der G_{168} invariante, irreducibele Curven der z_α-Ebene gewinnen, und durch diese Curven sind alsdann ebenso viele algebraische Gebilde definiert, deren einzelnes 168 eindeutige Transformationen in sich zulässt.

Wenn nun das durch $f_4 = 0$ dargestellte Gebilde für die Transformation siebenter Ordnung der Modulfunctionen die Grundlage liefert, so kann man fragen, in wie weit alle die übrigen soeben aufgestellten algebraischen Gebilde bei der Transformation siebenter Ordnung sonstiger automorpher Functionen Rolle spielen mögen. Hier bietet sich nun als eine erste Anwendung das durch $f_6 = 0$ dargestellte algebraische Gebilde dar. Die ausführliche Gestalt von f_6 ist:

$$(4)\qquad 5 z_1^2 z_2^2 z_4^2 - z_1^5 z_2 - z_2^5 z_4 - z_4^5 z_1 = 0.$$

Die hierdurch dargestellte ebene Curve sechster Ordnung C_6 ist irredu-

---

[1] Wegen der invariantentheoretischen Definition und Gestalt der $f_4, f_6, \ldots$ sehe man M. I, pag. 733; die Relation (2) ist von GORDAN l. c. angegeben.

[2] Siehe dieserhalb etwa M. I, pag. 702.

cibel und singularitätenfrei, so dass sie das Geschlecht $p = 10$ besitzt; *es liegt also in* (4) *ein algebraisches Gebilde* $p = 10$ *mit* 168 *Transformationen in sich vor, welche die uns bekannte* G_{168} *bilden.* Die Identität dieses Gebildes mit dem im vorigen Paragraphen auf arithmetischem Wege von der $\Gamma_{168}(2, 4, 7)$ aus abgeleiteten Gebilde des gleichen Geschlechtes lässt sich nun ohne besondere Mühe nachweisen.

Vorab sind zugleich zur Vorbereitung späterer Überlegungen einige geometrische Sätze über die Collineationsgruppe G_{168} zusammenzufassen: Die Substitutionen der Periode 7 in G_{168} besitzen in der z_α-Ebene im ganzen 8 mal 3 Fixpunkte, die als Punkte p_7 bezeichnet werden mögen, und die bezüglich der G_{168} alle mit einander aequivalent sind. Die 21 Paare einander inverser Substitutionen der Periode 4 haben 21 mal 3 Fixpunkte p_4; diese Punkte zerfallen in zwei Classen zu 42 bez. 21 Punkten, wobei nur die Punkte der gleichen Classe aequivalent sind; die 21 Punkte der zweiten Classe mögen allgemein p'_4 heissen. Die 28 Paare inverser Substitutionen der Periode 3 haben 28 mal 3 Fixpunkte, die wieder in zwei Classen zu 56 Punkten p_3 und 28 Punkten p'_3 zerfallen. Die noch fehlenden 21 Substitutionen haben den Charakter harmonischer Perspectivitäten; die 21 Axen sind die Verbindungslinien der 21 Paare zugeordneter Punkte p_4, die 21 Centren sind die Punkte p'_4.

Man bringe nun die durch (4) gegebene C_6 mit den Curven C_4, C_{14}, C_{21} der Gleichungen $f_4 = 0$, $f_{14} = 0$, $f_{21} = 0$ zum Durchschnitt und specialisiere zugleich die Relation (2) für die hier vorliegende Annahme $f_6 = 0$ zu:

$$f_{21}^2 = f_{14}^3 - 256 f_4^7 f_{14}. \tag{5}$$

Dass die C_4 *auf der* C_6 *die* 24 *Punkte* p_7 *ausschneidet, ist aus der Theorie der Modulfunctionen bekannt.*[1] Von den Punkten p_3, p'_3 liegt kein einziger auf C_6; zu den p'_3 gehört nämlich auch $z_1 = z_2 = z_4$, und dieser Punkt genügt der Gleichung (4) nicht; die Punkte p_3 sind hingegen die Schnittpunkte von $f_4 = 0$ und $f_{14} = 0$ und liegen deshalb nicht auf der C_6. Daraufhin prüfe man das System der 84 Schnittpunkte von C_6 und C_{14}. Da dieselben zufolge (5) auf den 21 Perspectivitätsaxen liegen, so kann es sich nur entweder um ein beliebiges System von 84 aequivalenten

[1] M. I, pag. 733.

Punkten der genannten Axen handeln, oder *im besonderen coincidieren die* 84 *Punkte auf* C_6 *und* C_{14} *zu Paaren an den* 42 *Stellen* p_4. Aus der Gestalt der Gleichung (5) ergiebt sich leicht, dass der letztere Fall vorliegt; dann aber folgt sogleich weiter: Die C_{21} schneidet C_6 in 126 Punkten, *nämlich einmal den* 42 *Punkten* p_4 *und sodann in weiteren* 84 *aequivalenten Punkten.*

Bei dieser Sachlage wird durch

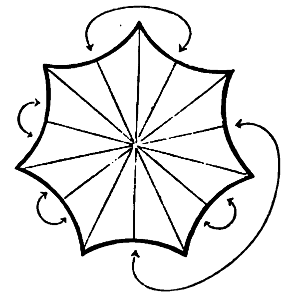
$$y : y - 1 : 1 = f_{21}^2 : f_{14}^3 : -256 f_4^7 f_{14} \tag{6}$$

eine 168-wertige algebraische Function unseres Gebildes definiert, welche in aequivalenten Punkten der C_6 gleiche Werte annimmt. Dabei coincidieren die 168 Punkte $y = 0$ zu 2 an 84 Stellen, die Punkte $y = 1$ zu 4 an den 42 Stellen p_4 und die Punkte $y = \infty$ zu 7 an den 24 Stellen p_7. Indem wir somit die Curve C_6 auf die Ebene y abbilden, entspringt eine 168-blättrige Riemann'sche Fläche des Geschlechtes $p = 10$, die nach Art und Lage der Verzweigungspunkte sowie betreffs der Gruppe G_{168} der Transformationen in sich mit der im vorigen Paragraphen gewonnenen Fläche übereinstimmt. Die genaue Identität beider Flächen lässt sich am einfachsten unter Benutzung der Resolventen siebenten Grades wie folgt beweisen.

Um direct an die Vorstellungen des vorigen Paragraphen anzuknüpfen, so muss sich ein Polygon von 2.7 Kreisbogendreiecken (2, 4, 7) derart construieren lassen, dass bei Abbildung desselben auf die y-Ebene eine siebenblättrige Fläche der nachfolgenden Verzweigung entspringt: Nur bei $y = 0, 1, \infty$ sollen Verzweigungspunkte liegen, und zwar muss die Anzahl in Cyclus zusammenhängender Blätter bez. ein Teiler von 2, 4 und 7 sein, je nachdem $y = 0, 1$ oder ∞ vorliegt; es soll aber auch wirklich bei $y = 0$ wenigstens ein Verzweigungspunkt zu 2, bei $y = 1$ zu 4, bei $y = \infty$ zu 7 Blättern vorkommen. Die Untersuchung zeigt, dass sich im ganzen *fünf* Polygone dieser Art auffinden lassen. Indessen sind unter diesen Polygonen nur *zwei* unsymmetrische enthalten, die durch symmetrische Umformung in einander übergehen. Dass aber diese beiden Polygone die Resolventen 7^{ten} Grades ergeben, um welche es sich hier handelt, ist aus der Structur der Gruppe G_{168} bekannt. Mit den beiden Gleichungen siebenten Grades ist nun auch die Riemann'sche Fläche ihrer gemeinsamen Galois'schen Resolvente eindeutig bestimmt, und also ist die

genaue Identität der beiden auf functionentheoretischem und arithmetischem Wege gewonnenen Riemann'schen Flächen auf demselben Wege wie oben in § 5 bei der Transformation fünfter Ordnung erhärtet.

Fig. 7.



Es sei gestattet, das eine der beiden unsymmetrischen Polygone hierneben in Fig. 7 mitzuteilen. Gebrauchen wir jetzt wieder die in (6) eingeführte Function y und wählen übrigens eine Hauptfunction $\tau(\eta)$ für das Polygon zweckmässig aus, so kann man nach einer bekannten Methode[1] die Gestalt der beiden Gleichungen siebenten Grades berechnen; es findet sich:

$$(7)\quad y-1:y:1=\tau^4(\tau-1)^2\left(\tau+\frac{1\pm i\sqrt{7}}{4}\right):\left(\tau^2-\frac{7\mp 3i\sqrt{7}}{14}\tau-\frac{1\pm i\sqrt{7}}{7}\right)^2$$
$$\cdot\left(\tau^3-\frac{21\pm 5i\sqrt{7}}{28}\tau^2-\frac{3\mp i\sqrt{7}}{7}\tau+\frac{7\pm 11i\sqrt{7}}{4\cdot 49}\right):\frac{49\pm 13i\sqrt{7}}{7^4}.$$

Man vergleiche dieses Resultat mit einer von KLEIN in Bd. 15 der Annalen, pag. 266, unter (12) aufgestellten Gleichung 7^{ten} Grades. Die letztere muss in (7) übergehen, wenn wir $\nabla=0$ d. i. $f_6=0$ nehmen. Man hat hier nur folgende kleine Rechnung vorzunehmen: erstlich schreibe man an Stelle von (7):

$$(8)\qquad \tau^4(\tau-1)^2\left(\tau+\frac{1\pm i\sqrt{7}}{4}\right)=\frac{49\pm 13i\sqrt{7}}{7^4}(y-1).$$

Nun werde an Stelle von τ die neue Variabele x durch die nachfolgende Bestimmung eingeführt:

$$x^2=-\frac{7\pm i\sqrt{7}}{2}\left(\tau+\frac{1\pm i\sqrt{7}}{4}\right).$$

Nach Ausführung dieser Substitution lässt sich aus (8) rechter und linker Hand die Quadratwurzel rational ausziehen, und es entspringt die Gleichung:

$$(9)\quad x^7+7\cdot\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}x^5-7(4\mp i\sqrt{7})x^3-7\cdot\frac{7\pm 3i\sqrt{7}}{2}x-16\sqrt{y-1}=0.$$

Hier liegt aber genau die l. c. abgeleitete Gleichung für $\nabla=0$ vor.

[1] Cf. M. I, pag. 638.

§ 3. *Von den durch die Gleichung* $\mu_1 f_6^2 + \mu_2 f_4^3 = 0$ *definierten algebraischen Gebilden.*

Nächst den beiden im vorigen Paragraphen besprochenen Riemann'schen Flächen sind die einfachsten algebraischen Gebilde mit der Gruppe G_{168} von Transformationen in sich diejenigen, welche durch die Gleichungen zwölften Grades:

$$f_{12} = \mu_1 f_6^2 + \mu_2 f_4^3 = 0 \tag{1}$$

definiert sind. An Stelle eines einzelnen Gebildes haben wir hier gleich zweifach unendlich viele, insofern der Wert der complexen (zwei reelle Parameter einschliessenden) Grösse $\mu = \mu_1 : \mu_2$ willkürlich wählbar bleibt. Hier gilt nun als erster Satz: *Unter den* ∞^2 *durch* (1) *gegebenen Curven* C_{12} *giebt es nur zwei reducibele, diejenigen nämlich, welche den Werten* $\mu_1 = 0$ *und* $\mu_2 = 0$ *entsprechen.* Sollte nämlich für einen von $\mu = 0$ und ∞ verschiedenen Wert des Quotienten $\mu_1 : \mu_2$ die Form f_{12} einen Factor f_m vom Grade $m < 12$ besitzen, so wird die Form f_m jedenfalls nicht durch *alle* 168 ternären Substitutionen der G_{168} in sich selbst übergehen. Ist sie aber gegenüber einer Untergruppe invariant, welche innerhalb G_{168} den Index[1] ν hat, so geht f_m durch die Substitutionen der G_{168} insgesamt in ν Gestalten $f_m, f'_m, \ldots, f_m^{(\nu-1)}$ über, und es werden diese ν unterschiedenen Formen m^{ten} Grades durchgängig Factoren von f_{12} sein. Nun ist, abgesehen von $\nu = 1$, der kleinste Wert von ν gleich 7. Bereits dieser würde $m = 1$ erfordern, und man hätte in

$$f_{12} = f_1 \cdot f'_1 \cdots f_1^{(6)} \cdot f_5$$

als letzten Factor eine Form fünften Grades f_5 mit 168 Substitutionen in sich; eine solche existiert indessen nicht. Auch die weiter folgenden Werte $\nu = 8, \ldots$ führen auf keine mögliche Zerfällung von f_{12}, und also sind alle ∞^2 algebraischen Gebilde (1) mit Ausnahme der beiden für $\mu = 0, \infty$ irreducibel.

---

[1] Vergl. M. I, pag. 309.

Um das Geschlecht der Gebilde (1) zu berechnen, bemerke man erstlich die Sonderstellung der 24 Punkte p_7. Sind in einem einzelnen derselben die Tangenten der beiden Curven $f_4 = 0$ und $f_6 = 0$ durch $x = 0$ bez. $y = 0$ bezeichnet, so hat man in der Nähe dieses Punktes als Gleichung der C_{12} angenähert $\mu_1 y^2 + \mu_2 x^3 = 0$; *jede C_{12} weist sonach in den 24 Punkten p_7 ebensoviele Spitzen auf.* Sonstige mehrfache Punkte treten aber im allgemeinen nicht auf. Denn es giebt ausser den Punkten p_7 keine weiteren Punkte der z_a-Ebene, welche zugleich auf allen ∞^2 Curven C_{12} gelegen wären. Von partikulären Werten μ und von den Punkten p_7 abgesehen ist nämlich ein Punkt einer C_{12} insgesamt mit 168 oder 84 Punkten eben dieser C_{12} bezüglich G_{168} aequivalent. Ausser jenen 24 Spitzen müssten demnach mit einem gleich 84 weitere singuläre Punkte auftreten, und dies würde dem Umstande widersprechen, dass die Geschlechtszahl p einer irreducibelen Curve notwendig $\geqq 0$ ist.

Die eben skizzierte Überlegung liefert nach einer bekannten Formel das Resultat, *dass unsere algebraischen Gebilde im allgemeinen das Geschlecht $p = 31$ besitzen.* Eine Herabminderung dieser Zahl p ist nur in zwei partikulären Fällen möglich. Da nämlich die Punkte p_3 und p_4 immer nur auf einer der beiden Curven C_4 und C_6 liegen (und nicht auf der anderen), so haben wir nur noch die beiden speciellen Curven zwölfter Ordnung $f_{12}^{(3)} = 0$ und $f_{12}^{(4)} = 0$ zu discutieren, welche durch die 28 Punkte p_3' bez. durch die 21 Punkte p_4' hindurchlaufen.

Einer unter den Punkten p_3' hat die Coordinaten $z_a = 1$; somit ist die besondere Curve $C_{12}^{(3)}$ gegeben durch:

$$f_{12}^{(3)}(z_a) = 27f_6^2 - 4f_4^3 = 0. \tag{2}$$

Die Punkte p_3' sind in der z_a-Ebene Fixpunkte von Diedergruppen G_6. Ein und derselbe Punkt einer Riemann'schen Fläche kann aber nicht zugleich Fixpunkt einer G_2 und G_3 sein, die eine Diedergruppe G_6 zusammensetzen; vielmehr bemerkt man leicht, dass alle Substitutionen, die einen einzelnen Punkt der Fläche an seiner Stelle lassen, notwendig eine *cyclische* Gruppe bilden. Die $C_{12}^{(3)}$ muss demnach durch den einzelnen Punkt p_3' mehrfach hindurchziehen, und die nähere Sachlage ergiebt 28 Doppelpunkte p_3' für $C_{12}^{(3)}$. *Diese Curve hat somit das Geschlecht $p = 3$.*

und die Classe $k = 4$, *und stellt sich mit ihren* 28 *Doppel- und* 24 *Rückkehrpunkten als die reciproke Curve der durch* $f_4 = 0$ *gegebenen* C_4 *dar.*[1]

Für die besondere Curve $C_{12}^{(4)}$ gelten völlig analoge Überlegungen. Die Gleichung dieser Curve wird man etwa aus dem Umstande ableiten, dass sie (ε als primitive 7^{te} Einheitswurzel gebraucht) durch den Punkt:

$$z_1 : z_2 : z_4 = (\varepsilon + \varepsilon^{-1} - \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}) : (\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} - \varepsilon^4 - \varepsilon^{-4}) : (\varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} - \varepsilon - \varepsilon^{-1})$$

hindurch zieht, der einer der 21 Punkte p_4' ist; es findet sich:

$$f_{12}^{(4)}(z_\alpha) = f_6^2 + 4f_4^3 = 0. \tag{3}$$

Noch einfacher aber ist es, die hier vorliegenden Werte $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 4$ aus gewissen weiter unten zu entwickelnden Überlegungen zu entnehmen. Übrigens beweist man, wie vorhin, dass die Punkte p_4' Doppelpunkte der $C_{12}^{(4)}$ sind; *es liegt demgemäss hier ein algebraisches Gebilde des Geschlechtes* $p = 10$ *vor.*

Gehen wir zu einer beliebigen Curve C_{12} des Büschels (1) zurück, so hält es nicht schwer, auf dem zugehörigen algebraischen Gebilde eine 168-wertige Function zu construieren. Die 48 Schnittpunkte der C_{12} mit der durch $f_4 = 0$ gegebenen C_4 fallen zu Paaren in den 24 Punkten p_7 zusammen. Schneiden wir die C_{12} ferner mit der durch $f_{14} = 0$ gegebenen C_{14} indem wir vorab annehmen, dass der Quotient μ von μ_1 und μ_2 nicht gerade einen der partikulären Werte:

$$\mu = 0, \infty, \frac{1}{4}, -\frac{27}{4} \tag{4}$$

habe. Das Schnittsystem kann dann sicher keines der speciellen Punktsysteme $p_7, p_3, p_3', p_4, p_4'$ enthalten; es kann aber auch im allgemeinen kein System zu 84 Punkten p_2 enthalten, weil die Schnittpunkte der 21 Perspectivitätsaxen und der C_{12} mit μ sämtlich veränderlich sind. Der Schnitt der C_{12} und der C_{14} liefert demnach 168 im allgemeinen durchaus getrennt liegende bezüglich G_{168} aequivalente Punkte, die nur für

---

[1] Betreffs der hier auftretenden Curve vierter Classe sei auch die Göttinger Dissertation (1890) von Hrn. M. W. Haskell genannt: *Über die zu der Curve* $\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$ *im projectiven Sinne gehörende mehrfache Überdeckung der Ebene.*

partikuläre μ in gewissen Systemen coincidieren können. Man definiere daraufhin die zum algebraischen Gebilde gehörende Function y wie folgt:

$$4y = \sqrt{-\mu}\cdot\frac{f_{14}}{(\sqrt{f_4})^7}. \tag{5}$$

Das Quadrat von y ist eine algebraische Function unseres Gebildes; y selbst ist unverzweigt, aber infolge der Quadratwurzel im Nenner von (5) könnte y bei Periodenwegen einen Zeichenwechsel erfahren oder auch in aequivalenten Punkten (bezüglich der G_{168}) entgegengesetzte Werte haben. Inzwischen können wir mit Hülfe der Identität (1) die Gleichung (5) in die andere Gestalt setzen:

$$4y = \mu^{-\frac{2}{3}}\frac{f_{14}}{(\sqrt[3]{f_6})^7}; \tag{6}$$

und indem hier eine Cubikwurzel im Nenner steht, ist evident, *dass y eine algebraische* 168-*wertige Function ist, die gegenüber den* 168 *Substitutionen absolut invariant ist.*

Nunmehr können wir unser algebraisches Gebilde auf eine 168-blättrige Riemann'sche Fläche über der y-Ebene beziehen. Verzweigungspunkte dieser Fläche werden immer dann eintreten, wenn für 168 bezüglich G_{168} aequivalente Punkte der C_{12} gewisse Coincidenzen eintreten. Wie wir schon sahen, kommen hier die Punkte p_7 in Betracht, jedoch im allgemeinen nicht die Punkte p_3, p_4, p_3', p_4'. Es bleibt somit nur noch die Discussion des Schnittes der C_{12} mit der C_{21}. Die einzelne der 21 Axen schneidet C_{12} in zwölf Punkten p_2, die zu je vier mit einander aequivalent sind. Einer dieser Punkte p_2 liegt im allgemeinen nur auf *einer* Axe; denn man stellt ohne Mühe durch gruppentheoretische Überlegungen fest, dass Schnittpunkte zweier Axen immer Punkte p_3' oder p_4' sind. Es folgt somit durch leichte Abzählung als Verzweigung unserer Riemann'schen Fläche: *Bei $y=\infty$ sind die Blätter zu je sieben in* 24 *Verzweigungspunkten verbunden; ausserdem finden sich an gewissen drei Stellen y jedesmal* 84 *zweiblättrige Verzweigungspunkte.* Als Geschlecht dieser Fläche findet sich, wie es sein muss, $p = 31$.

Zur Berechnung der letzteren Verzweigungsstellen y hat man in die Relation (2) § 2 die nachfolgenden Werte einzutragen:

$$f_{21} = 0, \qquad f_{14} = \frac{4}{\sqrt{-\mu}}y(\sqrt{f_4})^7, \qquad f_6 = \frac{1}{\sqrt{-u}}(\sqrt{f_4})^3. \tag{7}$$

Neben $y = \infty$ ergeben sich daraufhin die drei im Endlichen gelegenen Verzweigungsstellen als Wurzeln der Gleichung:

$$(8)\qquad \mu_1^2\mu_2 y^3 - 22\mu_1^2\mu_2 y^2 + \mu_1(16\mu_1^2 + 68\mu_1\mu_2 - 63\mu_2^2)y + (32\mu_1^3 + 344\mu_1^2\mu_2 + 938\mu_1\mu_2^2 + 27\mu_2^3) = 0.$$

Der gleich folgenden Untersuchung halber müssen wir die Invarianten des durch die Verzweigungsstellen gegebenen Punktquadrupels aufstellen. Unter Gebrauch einer sehr bekannten Bezeichnungsweise findet sich:

$$(9)\quad \begin{cases} g_2 = -2^2.3\mu_1^3\mu_2[3\cdot(4\mu_1)^2 - 2\cdot5\cdot7\cdot(4\mu_1)\mu_2 - 3^2.7\mu_2^2], \\ g_3 = -4\mu_1^4\mu_2^2[3^2.7(4\mu_1)^3 + 7\cdot13\cdot(4\mu_1)^2\mu_2 + 3^3.7\cdot17(4\mu_1)\mu_2^2 + 3^6\mu_2^3], \\ \Delta = -2^4.3^6\mu_1^8\mu_2^3(4\mu_1 + 27\mu_2)^3(4\mu_1 - \mu_2)^4. \end{cases}$$

Weiter ergiebt sich für die absolute Invariante $I = g_2^3 : \Delta$, wenn wir uns der Abkürzung $4\mu_1 : \mu_2 = \tau$ bedienen:

$$(10)\qquad I : I - 1 : 1 = \tau(3\tau^2 - 2.5.7\tau - 3^3.7)^3 : -(3^2.7\tau^3 + 7.13\tau^2 + 3^3.7.17\tau + 3^6)^2 : 27(\tau + 27)^3(\tau - 1)^4.$$

Diese Formeln hat man näher zu discutieren, indem man zugleich auf die Beziehung zwischen der absoluten Invariante I und dem Doppelverhältnis [1] der vier Verzweigungsstellen y Rücksicht nimmt.

Diese Untersuchung wird in übersichtlichster Weise dadurch ausgeführt, dass man τ als complexe Veränderliche ansieht und in der Ebene derselben die sieben conformen Abbilder der I-Ebene zeichnet, wie sie der Gleichung (10) entsprechen. Um diese Abbilder für das Auge in Evidenz zu bringen, kann man etwa diejenigen Linienzüge der τ-Ebene graphisch markieren, welche Abbilder der reellen I-Axe sind. Diese Linienzüge werden sich dreimal zu Paaren überkreuzen und dort Punkte mit $I = 1$ liefern; einer dieser Punkte liegt bei $\tau = 4\mu = -0{,}23\ldots$, die beiden anderen tragen conjugiert complexe Werte τ. Des ferneren werden die in Rede stehenden Linienzüge einander zu dreien in den beiden Punkten

[1] Siehe etwa M. I, pag. 70.

$4\mu = \tau = \frac{35 \pm 16\sqrt{7}}{3}$ überkreuzen und dortselbst Punkte mit $I = 0$ festlegen. Endlich liefern noch die beiden Kreuzungsstellen $4\mu = \tau = -27$ und $= 1$ Punkte mit $I = \infty$. Eine diesen Vorschriften entsprechende Zeichnung der τ-Ebene wird man sich leicht herstellen.

Liegen die vier Verzweigungsstellen y auf einem Kreise, so ist das Doppelverhältnis reell und I ist reell und $\geqq 1$. Sehen wir etwa nur auf die Punkte der reellen μ-Axe, so tritt dies nur für $4\mu \leqq -27$ ein: *Alle vier Verzweigungsstellen y sind stets und nur dann reell, wenn μ im Intervall $-\infty \leqq \mu \leqq -\frac{27}{4}$ der reellen Axe liegt; für alle übrigen reellen μ liegt ausser $y = \infty$ nur noch eine Verzweigungsstelle auf der reellen y-Axe, die beiden andern sind dann conjugiert complex.* Hierneben merken wir noch den Punkt $\tau = 4\mu = -0{,}23\ldots$ als solchen an, dem ein *harmonisches* Doppelverhältnis entspricht, während für die beiden Verschwindungsstellen des Ausdrucks $(3\tau^2 - 70\tau - 189)$ *aequianharmonisches* Doppelverhältnis vorliegt.

Die beiden Werte $\tau = 1$ und $\tau = -27$ liefern $I = \infty$; hier fallen beide Male zwei unter den vier Verzweigungsstellen zusammen. Die 168-blättrige Fläche degeneriert dabei so, dass bei $\tau = 1$ je zwei coincidierende Verzweigungspunkte einen neuen zu *vier* Blättern ergeben, während bei $\tau = -27$ durch Zusammenfall zweier Verzweigungspunkte je ein *drei*blättriger entsteht. Dass hier die beiden im voraufgehenden Paragraphen behandelten Flächen wieder entstehen, ist aus den damaligen Entwicklungen leicht ersichtlich.

Die Coincidenz von *zweien* unter vier Punkten eines Quadrupels hat man in projectiver Hinsicht stets als etwas Partikuläres anzusehen; aber es gilt nicht notwendig das Gleiche für den Zusammenfall dreier oder aller vier Punkte. Man kann nämlich immer eine lineare Substitution auf y (oder besser auf homogene y_1, y_2) ausüben, die im Sinne unserer Sprechweise hyperbolisch ist und einen oder auch zwei Punkte des Quadrupels zu Fixpunkten hat. Öfter wiederholte Anwendung dieser Substitution wird alsdann offenbar drei bez. alle Punkte des Quadrupels immer mehr zusammenrücken lassen. Um in diesem Sinne den Charakter unseres Punktquadrupels der Verzweigungsstellen y für $\mu_1 = 0$ bez. $\mu_2 = 0$ näher zu untersuchen, muss man auf die zugehörigen Werte I recurrieren.

Man findet aber $I = 0$ bez. $I = 1$ und hat somit für $\mu_2 = 0$ harmonisches, für $\mu_1 = 0$ aequianharmonisches Doppelverhältnis. Für $\mu = \infty$ und $\mu = 0$ sind sonach die eintretenden Coincidenzen allein Folgen einer unzweckmässigen Auswahl des y: *die vier Punkte y haben bei $\mu = \infty$ eine Lage, die in projectivem Sinne von einem beliebigen harmonischen Punktquadrupel nicht verschieden ist, und Analoges gilt für $\mu = 0$.* Diese Auffassung wird für das Verständnis der gleich folgenden Entwicklungen notwendig sein.

§ 4. *Von den zu den Gebilden $\mu_1 f_6^2 + \mu_2 f_4^3 = 0$ gehörenden η-Functionen.*

Die letzt vorangehenden Entwicklungen hatten den Zweck, die Betrachtung der zu unseren algebraischen Gebilden gehörenden η-Functionen vorzubereiten. Zur Einführung der letzteren müssen wir gegenwärtig auf die bezüglichen Existenztheoreme zurückgreifen, wie sie in den Arbeiten von KLEIN in Bd. 21 der Math. Annalen sowie in den gleichzeitigen Abhandlungen POINCARÉ's aufgestellt und behandelt worden sind.

Auf einer vorgelegten Riemann'schen Fläche giebt es eine grosse Mannigfaltigkeit derartiger Functionen η, die bei geschlossenen Wegen auf der Fläche lineare Substitutionen erfahren, und es galt, unter denselben diejenigen herauszugreifen, welche besonders einfache Eigenschaften haben. Man wird erstlich verlangen, dass die Gruppe der zugehörigen linearen Substitutionen eigentlich discontinuirlich sei, wobei dann ein zugehöriger Discontinuitätsbereich gerade genau ein conformes Abbild der zerschnittenen Riemann'schen Fläche sein soll. Des ferneren sollen die Substitutionscoefficienten durchaus reell sein, so dass wir mit einer Hauptkreisgruppe zu thun haben, und es soll die zugehörige Polygonteilung nur die eine Halbebene bedecken.

Um jetzt gleich auf eine einzelne unserer 168-blättrigen Flächen zurückzugehen, so ist durch die bisherigen Forderungen eine η-Function noch keineswegs eindeutig bestimmt. Vielmehr genügen denselben noch unendlich viele η-Functionen, deren Gruppen alsdann auf einander homomorph bezogen sind. Man kann aber eine einzelne unter diesen Functionen durch die Forderung aussondern, dass die Abbildung der Rie-

mann'schen Fläche auf das Polygon der η-Halbebene *ohne Ausnahme* conform sei. Dieser Forderung zufolge wird sich z. B. die Umgebung eines einzelnen Windungspunktes der Fläche, die sich über sich selbst mehrfach hinüberzieht, in der η-Halbebene auf einen einfach bedeckten Vollkreis abbilden.

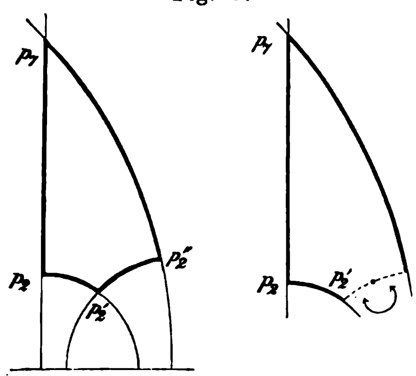
Man hat hier nun ein Beispiel jene Continuitätsbetrachtungen zu illustrieren, deren sich KLEIN und POINCARÉ beim Existenzbeweise der charakterisierten η-Function bedienten. Um dies weiter auszuführen, haben wir vorab den Umstand zu verwerten, dass die Fläche 168 eindeutige Transformationen in sich zulässt. Die η-Function erfährt entsprechend 168 lineare Substitutionen, und weiter ist eine Folge hiervon, dass sich das Polygon der η-Halbebene aus 168 mit einander aequivalenten Polygonen aufbauen lässt. Die Gruppe der η-Substitutionen, die den geschlossenen Wegen auf der Riemann'schen Fläche entsprechen, wird als ausgezeichnete Untergruppe Γ_{168} vom Index 168 in einer umfassenderen Gruppe Γ enthalten sein. *Diese letztere Gruppe Γ wird aber vom Geschlechte $p = 0$ sein und lässt sich aus vier elliptischen Substitutionen V_1, V_2, V_3, V_4 der Perioden 7, 2, 2, 2 erzeugen, zwischen denen die Relation $V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4 = 1$ besteht.* Letztere Angaben folgen bei den Eigenschaften von η aus dem Umstande, dass der Discontinuitätsbereich von Γ ein Abbild der η-Ebene ist.

Den Parametern der Vierecksgruppe mit fest gegebenen Winkeln $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ stehen nun die (beiden reellen) Parameter in dem System unserer algebraischen Gebilde gegenüber. Aber wir wollen die gegenseitige Abhängigkeit der beiderlei Parameter hier nicht in voller Allgemeinheit, sondern nur für die *symmetrischen* Riemann'schen Flächen verfolgen, deren zugehörige Vierecksgruppen Γ der Erweiterung durch Spiegelungen fähig sind. Hier ist der Parameter μ auf diejenigen Linienzüge seiner Ebene eingeschränkt, die wir im vorigen Paragraphen als Abbilder der reellen I-Axe markierten; und dieser *einfach* unendlichen Mannigfaltigkeit von Werten μ steht der *eine* reelle Parameter symmetrischer Vierecksgruppen gegenüber.

Man hat nun zwei wesentlich verschiedene Arten symmetrischer Vierecksgruppen Γ. Im einen Falle lässt sich die erweiterte Gruppe $\overline{\Gamma}$ *ausschliesslich* aus Spiegelungen erzeugen, im zweiten Falle sind die Erzeugenden

von $\overline{\Gamma}$ drei Spiegelungen und eine elliptische Substitution der Periode zwei; die nebenstehenden Zeichnungen versinnlichen dies näher. Die Figuren sind so angenommen, dass der Punkt p_2 beide Male mit $\eta = i$ coincidiert, während die Verbindungslinie der Eckpunkte p_2 und p_7 auf die imaginäre η-Axe zu liegen kommt.

Fig. 8.



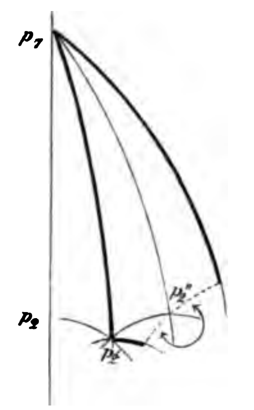
Wenn wir hier etwa nur auf die reellen Werte von μ achten sollen, so würde einem Viereck von der ersten in Fig. 8 gegebenen Gestalt ein $\mu \leqq -\frac{27}{4}$ entsprechen. Mit der Entfernung p_2, p_7 ist das Viereck eindeutig bestimmt; dieselbe ist so gross anzunehmen, dass der Kreis (p_7, p_2'') den Einheitskreis nicht schneidet, und sie darf andrerseits so klein gewählt werden, dass die Entfernung (p_2, p_2') im Sinne der hier in Betracht kommenden Maassbestimmung grösser als (p_2', p_2'') ist. Die beiden Grenzlagen des Kreisbogenvierecks sind hiermit bereits markiert: Für $4\mu = -27$ degeneriert das Viereck in ein Kreisbogendreieck der Winkel $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{2}, 0$. Auf der geschlossenen Fläche, die eine reguläre Einteilung in 2.168 Vierecke trägt, ist dieser Grenzfall dadurch charakterisiert, dass längs gewisser 28 Symmetrielinien Abschnürungen der Fläche eintreten, wobei an Stelle jeder Symmetrielinie ein Punktepaar unter entsprechender Verminderung des Zusammenhanges der Fläche tritt.

Der andere Grenzfall des Kreisbogenvierecks liefert $\mu = \infty$ und $I = 1$; wir haben ein längs seiner Diagonale p_7, p_2' symmetrisches Viereck und entsprechend die harmonische Lage der vier Verzweigungsstellen y. Die Gruppe Γ_{168}' lässt sich jetzt als $\Gamma_{2.168}'$ innerhalb der Dreiecksgruppe $(2, 4, 14)$ ansehen, aber wie wir am Schlusse des vorigen Paragraphen bereits bemerkten, versagt die Darstellung des zugehörigen algebraischen Gebildes vermöge der Curven C_4, C_6 der z_α-Ebene.

Im gerade besprochenen Grenzfall tritt als neue Symmetrielinie die Diagonale p_7, p_2' auf. Indem wir μ jetzt über ∞ reelle positive Werte annehmen lassen, bleibt die letztere Symmetrielinie allein in Geltung,

während übrigens die bisherigen Symmetrielinien ihren Charakter als solche einbüssen. Der hiermit geometrisch bezeichnete Übergang, den die beigefügte Fig. 9 noch näher versinnlichen soll, verificiert ganz unmittelbar, dass sich der Übergang über $\mu = \infty$ ohne Zerfall des algebraischen Gebildes vollzieht.

Fig. 9.



Man wird in ähnlicher Weise für die positiven Werte von μ die begonnenen Betrachtungen fortsetzen. Der partikuläre Fall des Geschlechtes $p = 10$ für $4\mu = 1$ wird dann entstehen, wenn die beiden durch die elliptische Substitution der Periode 2 auf einander bezogenen Randcurven des gehälfteten Ausgangsvierecks unendlich klein geworden sind. Man kommt dann wieder auf das Kreisbogendreieck $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{2}, 0$ zurück. Hierbei ist bemerkenswert, dass wir sowohl jetzt wie vorhin bei $4\mu = -27$ durch Grenzübergang gar nicht die η-Functionen

$$(1) \qquad \eta(2, 3, 7; y) \quad \text{und} \quad \eta(2, 4, 7; y)$$

gewinnen, die doch im Sinne unserer allgemeinen Massnahme zu den beiden Gebilden mit $4\mu = 1$ und -27 gehören; vielmehr erhalten wir in beiden Fällen die η-Function $\eta(2, \infty\, 7; y)$, welche auf die unter (1) genannten Functionen nur erst homomorph bezogen ist. Im übrigen dürfte nur noch die Betrachtung der aequianharmonischen Fälle $I = 0$ von Interesse sein. Hier wird, wie man leicht überblickt, Γ_{168} eine Untergruppe $\Gamma_{3.168}$ innerhalb der Dreiecksgruppe $(2, 4, 21)$. Die Zahl der Symmetrien verdreifacht sich, und dem entspricht die Möglichkeit, das Viereck von hieraus auf dreifachem Wege als symmetrisches continuirlich abzuändern. Diese Möglichkeit aber documentierte sich in der Figur des vorigen Paragraphen dadurch, dass sich an den Stellen $I = 0$ *drei* Linienzüge überkreuzten.

Analoge Untersuchungen von immer mannigfaltigerem Charakter lassen sich an die algebraischen Gebilde knüpfen, wie sie durch Curven C_{14}, C_{18} etc.:

$$\mu_1 f_{14} + \mu_2 f_6 f_4^2 = 0,$$

$$\mu_1 f_{14} f_4 + \mu_2 f_6^3 + \mu_3 f_6 f_4^3 = 0, \text{ etc.}$$

zu definieren sind. Zumal die C_{14} würden zu ganz analogen Betrachtungen Anlass geben, wie voraufgehend die Curven C_{12}. An Stelle des Kreisbogenvierecks mit drei rechten Winkeln und einem Winkel $\frac{\pi}{7}$ tritt hier das Kreisbogenfünfeck mit drei rechten Winkeln, einem Winkel $\frac{\pi}{3}$ und einem Winkel $\frac{\pi}{4}$. Hier stellt sich dann als eine der Ausartungen das Kreisbogenviereck der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ ein, bei welcher aber kein Zerfall des algebraischen Gebildes stattfindet. Eine Vierecksgruppe dieser Art ist nun von arithmetischer Seite her bereits länger bekannt; es ist die reproducierende Gruppe der ternären quadratischen Form $(x^2 + y^2 - 11z^2)$ im Sinne POINCARÉ's.[1] Dabei ist das Zustandekommen einer ausgezeichneten Untergruppe Γ_{168} vom Index 168 auch aus dem arithmetischen Bildungsgesetze der Gruppe verständlich. Die Coefficienten der betreffenden η-Substitutionen setzen sich nämlich numerisch rational aus den Irrationalitäten $\sqrt{2}$ und $\sqrt{11}$ zusammen. Die Reduction modulo 7 liefert demgemäss nur 168 incongruente Substitutionen, da 2 und 11 quadratische Reste von 7 sind. Es ergiebt sich von hieraus die Existenz einer geschlossenen Fläche vom Geschlechte $p = 36$ mit einer regulären Einteilung in 2.168 Vierecke der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, und man könnte insbesondere in den Symmetrielinien dieser Fläche ein interessantes Gegenbild der Gruppenstructur G_{168} entwickeln. Alle ∞^1 Gruppen der Kreisbogenvierecke $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ (mit Hauptkreis) sind übrigens einander isomorph, und es soll durch die vorangehenden Mitteilungen noch keineswegs be-

[1] Vergl. die schon oben genannte Abhandlung POINCARÉ's *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique* in LIOUVILLE's Journal, 4[te] Folge, Bd. 3.

hauptet sein, dass die besondere Gruppe des Rationalitätsbereiches $\sqrt{2}$, $\sqrt{11}$ gerade auch die aus der speciellen C_{14} sich ergebende Gruppe sei. Inzwischen scheint es sehr schwierig zu sein, hierüber zu entscheiden. Die Continuitätsbetrachtungen über die Gestalt der Kreisbogenpolygone wiederholen sich natürlich gleichfalls unter immer grösserer Mannigfaltigkeit der in Betracht kommenden Verhältnisse. Es scheint aber, dass man bei Betrachtungen dieser Art erst noch eine grössere Reihe von Einzelerfahrungen wird sammeln müssen, ehe die allgemeinen Erwägungen, durch welche die Begründer der Theorie der automorphen Functionen die Existenztheoreme der η-Functionen darzulegen versuchten, als allseitig geklärt angesehen werden können.

Braunschweig, März 1893.